Théorie ergodique et mesures infinies

Damien Thomine,
Introduction au domaine de recherche pour une thèse
dirigée par Sébastien Gouëzel[1].

Octobre 2010

[1]IRMAR, Université Rennes 1

Table des matières

1 Introduction

Avant d'entrer dans le coeur du sujet, nous rappelons quelques définitions élémentaires de la théorie ergodique. Les objets d'étude en théorie ergodique sont des ensembles soumis à des transformations. Ces systèmes s'inspirent entre autres de modèles physiques chaotiques (billards, turbulences, etc.) : la transformation associe, à l'état d'un système à un instant donné, son état après qu'un certain laps de temps fixé s'est écoulé. On cherche ensuite à connaître l'évolution du système sur le long terme, même si celle-ci est parfois imprévisible si l'on a la moindre incertitude sur les conditions initiales.

Ici, $(X, \mathcal{B})$ désignera toujours un ensemble mesurable, T sera une application mesurable de X dans lui-même, et μ sera une mesure positive σ-finie sur X.

Définition 1.1 (Mesures ergodiques)**.**
Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique. On dit que la mesure μ est ergodique si, pour tout ensemble mesurable A stable par T, ou bien A est de μ-mesure nulle, ou bien A est de μ-mesure pleine.

En un certain sens, si μ est ergodique, alors il n'y a pas de partie de X stable par T non triviale. Par la suite, on fera souvent l'hypothèse que la mesure μ est (T-)invariante et ergodique.

Définition 1.2 (Systèmes conservatifs)**.**
Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique. On dit qu'un ensemble mesurable A est errant si les ensembles $(T^{-n}A)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints.

On dit que le système $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ est conservatif si tout ensemble errant est de mesure nulle.

De façon un peu abusive, on peut aussi dire que la transformation T est ergodique ou conservative, la mesure étant alors implicite. Maintenant que les bases sont posées, nous pouvons aborder le sujet de ce mémoire. Nous traiterons dans la première partie les théorèmes de convergence en mesure finie (théorème de Birkhoff), et les problèmes qui se posent en mesure infinie. La deuxième partie introduira quelques outils utiles à l'étude en mesure infinie, et des résultats que l'on peut formuler grâce à eux. Enfin, la troisième et dernière partie montrera certaines insuffisances des théorèmes disponibles en mesure infinie.

1.1 Phénomènes propres aux mesures infinies

Nous commençons par présenter quelques différences qualitatives entre un système dynamique muni d'une mesure ergodique finie, et un système muni d'une mesure ergodique infinie. Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique. Si la mesure μ est finie, on peut supposer, quitte à la multiplier par une contante, qu'elle est une mesure de probabilité. On peut alors appliquer un résultat central de la théorie ergodique, le théorème de Birkhoff (voir par exemple le théorème 4.1.2 dans [2]).

Theorème 1.3 (Théorème de Birkhoff).

Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique muni d'une mesure de probabilité invariante et ergodique. Soit f une fonction de $\mathbb{L}^1(X, \mu)$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad \mu - p.p.$$

Sous ces hypothèses, les moyennes temporelles et spatiales des observables sont presque sûrement égales, et la suite $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ se répartit (presque sûrement) suivant la distribution μ. On peut aussi voir ce résultat comme une loi forte des grands nombres pour la suite $(f(T^n x))_{n \in \mathbb{N}}$, pour toute fonction intégrable f. La situation est cependant très différente si la mesure considérée est σ-finie, mais infinie. Dans ce cas, on est face à un phénomène de type récurrence nulle. Si on se donne un ensemble mesurable A tel que $\mu(A) > 0$, les itérés $T^n x$ vont revenir (presque sûrement) un nombre infini de fois dans l'ensemble A, mais le temps de retour moyen en A est infini. Le résultat suivant formalise ce phénomène :

Proposition 1.4.

Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique conservatif muni d'une mesure σ-finie infinie, invariante et ergodique. Soit f une fonction positive non nulle de $\mathbb{L}^1(X, \mu)$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = +\infty \quad \mu - p.p., \tag{1.1}$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = 0 \quad \mu - p.p. \tag{1.2}$$

L'équation (1.1) est un résultat général de théorie ergodique (c'est un corollaire de la proposition 1.2.2 de [1]), qui s'applique aussi dans le cas des mesures finies, et l'équation (1.2) est un corollaire spécifique aux mesures ergodiques infinies du théorème ergodique de Hopf (lui-même une généralisation du théorème ergodique de Birkhoff, voir le théorème 2.2.5 de [1]) :

Theorème 1.5 (Théorème ergodique de Hopf).

Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique muni d'une mesure positive non nulle, σ-finie, invariante et ergodique. Soit f et g des fonctions de $\mathbb{L}^1(X, \mu)$, telles que $\int_X g \, \mathrm{d}\mu > 0$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}{\sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x)} = \frac{\int_X f \, \mathrm{d}\mu}{\int_X g \, \mathrm{d}\mu} \quad \mu - p.p. \tag{1.3}$$

En particulier, si g est la densité d'une mesure de probablité par rapport à la mesure μ, la convergence se fait vers $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Autrement dit, pour toute fonction dans $\mathbb{L}^1(X, \mu)$, la convergence suivante a lieu pour une suite de fonctions à valeurs réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convenable :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n(x)} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad \mu\text{-p.p.}$$

Malheureusement, les suites $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dépendent du point de départ x. Si l'on souhaite éliminer cette dépendance, plusieurs questions se posent. Quel type de convergence non triviale peut-on espérer, et vers quels objets ? Pour quels systèmes une telle approche peut-elle fonctionner ? Un théorème de Aaronson (théorème 2.4.1 de [1]) montre qu'on ne peut pas obtenir de convergence presque partout non triviale :

Theorème 1.6.
Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique muni d'une mesure positive non nulle, σ-finie, invariante et ergodique. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. Alors on a l'alternative suivante. Ou bien :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = +\infty \quad \mu - p.p. \quad \forall f \in \mathbb{L}^1(X, \mu), \ f \geq 0,$$

ou bien :

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = 0 \quad \mu - p.p. \quad \forall f \in \mathbb{L}^1(X, \mu), \ f \geq 0.$$

Il n'y a donc pas d'équivalent simple du théorème de Birkhoff en mesure infinie. Il faudra s'intéresser à des formes de convergence plus faibles, liées à la convergence en loi de certaines variables aléatoires.

1.2 Exemples

Nous donnons maintenant deux exemples de systèmes dynamiques munis d'une mesure ergodique infinie. Le premier nous permettra d'exploiter la littérature existante sur les marches aléatoires pour retrouver des propriétés de certains systèmes dynamiques, là où le second présente une plus grande diversité de comportements et bénéficie de quelques avancées récentes.

- La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: il s'agit par exemple du système dynamique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), T_{MA}, \text{Leb})$, où $T_{MA} \ : \ x \mapsto [x] - 1 + 4\{x\}$ si $0 \leq \{x\} < 1/2$, et $T_{MA} \ : \ x \mapsto [x] - 2 + 4\{x\}$ si $1/2 \leq \{x\} < 1$. L'expression $[x]$ désigne ici la partie entière de x, et $\{x\}$ la partie décimale de X. La mesure de Lebesgue est invariante et ergodique pour cette transformation.
- Les transformations de Pomeau-Manneville : il s'agit cette fois-ci d'une famille de systèmes dynamiques $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), T_\alpha, \mu_\alpha)$ indexés par $\alpha \geq 0$. Ici, $T_\alpha \ : \ x \mapsto x(1 + 2^\alpha x^\alpha)$ si $0 \leq x < 1/2$ et $T_\alpha \ : \ x \mapsto 2x - 1$ si $1/2 \leq x < 1$. Pour tout $\alpha \geq 0$, l'application T_α a (à un facteur multiplicatif près) une unique mesure invariante, ergodique et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, que nous notons μ_α et qui est infinie si $\alpha \geq 1$.

Nous reparlerons des transformations de Pomeau-Manneville en sous-section 2.3. Pour l'instant, nous étudions le cas de la marche aléatoire. L'intérêt de cette transformation est qu'elle est markovienne, et que la chaîne de Markov associée est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, que nous noterons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si elle part de 0, et telle que $\mathbb{P}(S_1 = 0) = 2\mathbb{P}(S_1 = 1) = 2\mathbb{P}(S_1 = -1) = 1/2$. Un grand nombre de propriétés de cette marche aléatoire probabiliste se traduisent en propriétés du système dynamique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), T_{MA}, \text{Leb})$. Par exemple, pour la marche aléatoire probabiliste, le temps passé en zéro satisfait la propriété suivante (théorème 9.11 de [5]) :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \#\{0 \leq k < n \ : \ S_k = 0\} \leq x \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} \, \mathrm{d}u. \qquad (1.4)$$

Or, si $g = 1_{[0,1]}$, et si l'on choisit x uniformément dans $[0,1]$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} g(T_{MA}^k x)$ et $\#\{0 \leq k < n \ : \ S_k = 0\}$ suivent la même loi. Ceci, le théorème de Hopf 1.5 ainsi que d'autres résultats sur la marche aléatoire (le théorème 9.11 de [5] pour la borne inférieure, et le théorème 11.3 de [5] pour la borne supérieure, par exemple), impliquent que pour toute fonction f dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \text{Leb})$ et tout ϵ strictement positif :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \sum_{k=0}^{n-1} f(T_{MA}^n x) = 0 \ \text{ Leb-p.p.},$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \sum_{k=0}^{n-1} f(T_{MA}^n x) = +\infty \ \text{ en loi.}$$

La bonne vitesse de convergence est de l'ordre de $n^{-1/2}$, mais nous aurons, au lieu d'une convergence presque sûre, une forme de convergence en loi. C'est l'objet de la prochaine section.

2 Quelques résultats généraux

Avant d'aborder les théorèmes jouant le rôle du théorème de Birkhoff en mesure infinie, nous devons introduire quelques nouveaux outils. La plupart (les distributions limites, le type de convergence vers des distributions, etc.) sont rapides à définir et seront traités dans la sous-section 2.2, mais l'un d'entre eux, l'opérateur de transfert associé à la dynamique, demande plus de temps pour être présenté. C'est pourquoi la sous-section 2.1 lui est réservée.

2.1 Ergodicité duale

Nous introduisons tout d'abord un objet très important, l'opérateur de transfert associé au système $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$. Remarquons tout d'abord que l'application $f \mapsto f \circ T$ est linéaire et continue de $\mathbb{L}^\infty(X, \mu)$ dans lui-même. L'opérateur de transfert est son opérateur prédual.

Définition 2.1 (Opérateur de transfert)**.**
Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique. On définit son opérateur de transfert $\mathcal{L} : \mathbb{L}^1(X, \mu) \mapsto \mathbb{L}^1(X, \mu)$ par :

$$\int_X g \cdot \mathcal{L} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \circ T \cdot f \, \mathrm{d}\mu \quad \forall g \in \mathbb{L}^\infty(X, \mu). \tag{2.1}$$

Cet opérateur a une interprétation probabiliste. Si $f \in \mathbb{L}^1(X, \mu)$ est positive et de norme 1, alors $f \, \mathrm{d}\mu$ est une mesure de probabilité sur X. De plus, si on tire un point x de X suivant la loi $f \, \mathrm{d}\mu$, alors Tx suit la loi $\mathcal{L} f \, \mathrm{d}\mu$. En d'autres termes, $\mathcal{L}$ décrit la transformation des mesures finies et absolument continues par rapport à la mesure de référence μ sous l'action de la dynamique T.

Beaucoup de propriétés d'un système dynamique peuvent se traduire à l'aide de l'opérateur de transfert ; nous en donnons deux exemples. Pour commencer, voici une caractérisation de l'ergodicité d'un système conservatif (proposition 1.3.2 de [1]), similaire à la proposition 1.4 :

Proposition 2.2.
Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique. Alors T est ergodique et conservative si et seulement si, pour toute fonction f dans $\mathbb{L}^1(X, \mu)$ positive et non identiquement nulle,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^n f = +\infty \quad \mu - p.p.$$

On dispose aussi d'un analogue au théorème ergodique de Birkhoff, en l'occurence un corollaire du théorème ergodique de Hurewicz (proposition 2.2.1 de [1]) :

Theorême 2.3.
Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique muni d'une mesure de probabilité invariante et ergodique. Soit f une fonction de $\mathbb{L}^1(X, \mu)$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^k f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad \mu - p.p.$$

L'introduction de l'opérateur de transfert va nous aider à formuler quelques résultats intéressants dans la sous-section 2.2, ainsi que dans la sous-section 2.3. Nous pouvons dès maintenant formuler certains théorèmes généraux, et les appliquer aux exemples de la sous-section 1.2.

2.2 Convergence forte en distribution

Nous sommes avant tout intéressés par la convergence de certaines suites. L'un des derniers pas avant de présenter les résultats centraux de ce mémoire est de définir les objets limites, ainsi que le type de convergence vers ces objets.

Définition 2.4 (Convergence forte en distribution).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$, où μ est potentiellement infinie. Soit Y une variable aléatoire réelle.

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement en distribution vers la variable aléatoire Y si, pour toute mesure de probabilité P sur X absolument continue par rapport à μ, la suite de variables aléatoires $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(X, \mathcal{B}, P)$ dans $\mathbb{R}$ converge en loi vers Y.

Définition 2.5 (Distribution de Mittag-Leffler).

Soit $\beta \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire Y_β à valeurs réelles positives suit la distribution de Mittag-Leffler d'ordre β normalisée si, pour tout nombre complexe dans $\mathbb{C}$ (tout nombre complexe du cercle unité ouvert si $\beta = 0$) :

$$\mathbb{E}(e^{zY_\beta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(1+\beta)^n z^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

La renormalisation permet de toujours avoir $\mathbb{E}(Y_\beta) = 1$. On remarque facilement que la loi de Y_0 est celle d'une variable aléatoire exponentielle, et que la loi de $Y_{1/2}$ est celle de la valeur absolue d'une gaussienne.

Enfin, nous devons ajouter une condition sur le comportement des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui permettent aux sommes $\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ de converger :

Définition 2.6 (Variation régulière).

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs strictement positives est dite à variation régulière d'ordre β si, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{u_{[xy]}}{u_{[y]}} = x^\beta.$$

Ces définitions étant posées, nous pouvons enfin présenter quelques résultats. Le premier est une conséquence de la proposition 3.7.1 et du corollaire 3.7.3 de [1].

Proposition 2.7.

Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique conservatif, tel que μ est T-invariante et ergodique. Supposons qu'il existe une suite de réels strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour toute fonction f dans $\mathbb{L}^1(X, \mu)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^k f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad \mu - p.p. \tag{2.2}$$

Alors, pour tous ensembles mesurables B et C, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(B \cap T^{-k}C) \geq \mu(B)\mu(C). \tag{2.3}$$

Si de plus la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à variation régulière d'ordre $\beta \in [0, 1]$, alors, pour toute fonction positive f dans $\mathbb{L}^1(X, \mu)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \cdot Y_\beta,$$

où Y_β suit la distribution de Mittag-Leffler d'ordre β normalisée et où la convergence est forte en distribution.

On peut cependant désirer d'autres conditions que (2.2), plus adaptées à certaines classes de problèmes ou plus contraignantes (mais aux conséquences plus fortes). Nous verrons dans la sous-section 2.3 le cas des applications de Pomeau-Manneville, dans lequel on peut connaître précisément le comportement asymptotique des opérateurs $\mathcal{L}^n$, au lieu de s'intéresser seulement à des moyennes correctement renormalisées de ces opérateurs. Pour l'instant, nous nous bornerons à un résultat plus facilement applicable aux transformations markoviennes, telles que la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (c'est une conséquence des proposition 3.7.5, proposition 3.7.1 et corollaire 3.7.3 dans [1]).

Proposition 2.8.

Soit $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un système dynamique conservatif, tel que μ est T-invariante et ergodique. Supposons qu'il existe un ensemble mesurable A de μ-mesure finie non nulle et une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $+\infty$ tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^k 1_A = \mu(A), \tag{2.4}$$

où la limite est prise uniformément sur A à un ensemble de mesure nulle près. Alors les conclusions de la proposition 2.7 sont vérifiées, et l'on dispose de plus d'une version alternative de l'inégalité (2.3)*. Pour tous ensembles mesurables B et C inclus dans A, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(B \cap T^{-k} C) = \mu(B)\mu(C). \tag{2.5}$$

Les ensembles satisfaisant la condition (2.4) sont appelés ensembles de Darling-Kac. En fait, les conditions de la proposition 2.8 impliquent celles de la proposition 2.7 ; cependant, on peut obtenir une conclusion un peu plus forte, l'application T étant alors d'une certaine façon faiblement mélangeante (équation (2.5)).

L'un des avantages de cette nouvelle condition est qu'elle est particulièrement facile à appliquer à certaines applications markoviennes. Dans le cas de la marche aléatoire T_{MA} telle que définie dans la sous-section 1.2, par exemple, $[0, 1[$ est un ensemble de Darling-Kac, tout simplement car les fonctions $\mathcal{L}_{MA}^n 1_{[0,1[}$ sont toutes constantes sur $[0, 1[$ (on peut vérifier que $\mathcal{L}_{MA}^n 1_{[0,1[}$ vaut $\mathbb{P}(S_n = 0)$ sur $[0, 1[$, où S_n est la marche aléatoire probabiliste issue de 0 définie dans la même sous-section). La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée est, à équivalence asymptotique près, $2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$, qui est à variation régulière d'ordre $1/2$. Dans ce cas, on peut même montrer par des arguments probabilistes que tout ensemble de la forme $[n, m]$, où n et m sont des entiers relatifs, est un ensemble de Darling-Kac.

Corollaire 2.9.

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), T_{MA}, \mathrm{Leb})$ le système dynamique (« marche aléatoire ») défini en sous-section 1.2. Les égalités suivantes sont valables respectivement pour tous ensembles mesurables B et C bornés, pour toute fonction f intégrable, et pour toute fonction g positive et intégrable :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(B \cap T_{MA}^{-k} C) = \mu(B)\mu(C);$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_{MA}^k f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \quad \mu - p.p.;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T_{MA}^k = \sqrt{2} \int_X g \, \mathrm{d}\mu \cdot |N|,$$

où N est une gaussienne de variance 1 et où la convergence est forte en distribution.

Nous traitons dans la sous-section suivante le cas des applications de Pomeau-Manneville, pour lesquelles on connaît des propriétés plus fines.

2.3 Applications de Pomeau-Manneville

Nous rappelons que, pour tout $\alpha \geq 0$, on définit l'application de Pomeau-Manneville T_α sur $[0,1]$ par : $T_\alpha x = x(1+2^\alpha x^\alpha)$ si $0 \leq x < 1/2$ et $T_\alpha x = 2x-1$ si $1/2 \leq x < 1$. Pour $\alpha = 0$, l'application de Pomeau-Manneville est l'application dyadique, et la mesure de Lebesgue est invariante et ergodique. Quand le paramètre α est strictement positif, les trajectoires $(T_\alpha^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ vont mettre plus de temps pour s'éloigner de 0, et vont donc passer plus de temps sur un voisinage de 0. L'application T_α a toujours une unique mesure invariante et ergodique μ_α absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, dont la densité est de plus continue, mais cette densité a un pôle d'ordre α en 0. Par conséquent, pour $\alpha \geq 1$, le système est muni d'une mesure invariante, ergodique et infinie : les trajectoires mettent tellement de temps pour s'éloigner de 0 qu'elles passent un temps asymptotiquement nul dans toute partie de $[0,1]$ à distance strictement positive de 0.

Ces applications ont été étudiées en détail, avec entre autres des résultats de Liverani, Saussol et Vaienti [3] sur les mesures invariantes et les propriétés de mélange dans le cas $\alpha < 1$, et de Thaler [6] sur l'ergodicité duale. Dans l'énoncé suivant, $\mathcal{L}_\alpha$ désigne l'opérateur de transfert pour l'application T_α.

Theorème 2.10.
Soit $\alpha \geq 1$. Posons $a_n(\alpha) = n^{\frac{1}{\alpha}}$ si $\alpha > 1$, et $a_n(1) = \dfrac{n}{\ln n}$. Alors, il existe une constante $C(\alpha)$ telle que, pour tout intervalle fermé A de $]0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_\alpha^k 1_A = C(\alpha)\mu(A),$$

où la limite est prise uniformément sur A à un ensemble de mesure nulle près. De plus, pour toute fonction positive f dans $\mathbb{L}^1(X,\mu)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_\alpha^k f = C(\alpha) \int_X f \, \mathrm{d}\mu_\alpha \quad \mu_\alpha - p.p,$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = C(\alpha) Y_{\frac{1}{\alpha}},$$

où $Y_{\frac{1}{\alpha}}$ suit la distribution de Mittag-Leffler d'ordre $1/\alpha$ normalisée et où la convergence est forte en distribution.

Les applications T_α présentent donc toute une variété de comportements suivant la valeur de α. Mieux encore, on dispose entre autres pour cet exemple d'équivalents asymptotiques précis des opérateur $\mathcal{L}_\alpha$ (théorème 1.1 de [4]) :

Theorème 2.11.

Soit $\alpha \in [1, 2[$. Il existe une suite $b_n(\alpha)$ à variation régulière d'ordre $1/\alpha$ telle que, pour toute fonction $f = u \cdot v$ où u est Riemann-intégrable et $v \in \mathbb{L}^1(\mu_\alpha)$ est à variation bornée :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{b_n(\alpha)} \mathcal{L}_\alpha^n f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu_\alpha,$$

où la limite est uniforme sur tout compact de $]0, 1]$.

Il semble que ce résultat serait valide pour tout α supérieur à 1 (Remarque 2.4 de [4]).

Ce théorème a l'avantage de fournir un équivalent asymptotique des itérées de l'opérateur $\mathcal{L}_\alpha$, et non de la moyenne des itérées. Cependant, l'une des lacunes de ce théorème, et en général de tous les théorèmes présentés jusqu'ici, est que bien qu'ils soient adéquats dans le cas de fonctions de moyenne non nulle, ils sont trop faibles dans le cas de fonctions de moyenne nulle (de la même façon que la loi faible des grands nombres décrit beaucoup plus mal le comportement asymptotique d'une marche aléatoire que le théorème central limite). Nous détaillons ce problème dans la prochaine section.

3 Position du problème

La théorie ergodique en mesure finie, où l'on peut se ramener à des mesures de probabilité, a été et est toujours très largement étudiée. Les comportements généraux observés incluent la convergence presque sûre des observables vers leur moyenne (théorème de Birkhoff), mais aussi, pour certains classes de systèmes, des versions du théorème central limite et d'autres résultats encore plus précis (principe d'invariance presque sûre, grandes déviations...). Par exemple :

Theorème 3.1 (Théorème central limite)**.**

Soit $(I_k)_{1 \leq k \leq N}$ une partition de $[0, 1]$ en intervalles. Soit T une application de $[0, 1]$ dans lui-même telle que la restriction de T à chacun des intervalles I_k soit $\mathcal{C}^2$, et que $\inf_{x \in [0,1]} |T'(x)| > 1$ (une telle application est appelée application uniformément dilatante de l'intervalle).

Alors la tranformation T possède un nombre fini de mesures invariantes et ergodiques ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et ces densités sont à variation bornée. Soit μ l'une de ces mesures, et soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ à variation bornée (par exemple, $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f \circ T^k - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right) = N,$$

où N est une gaussienne de variance finie σ^2 et où la convergence se fait en loi (quand l'espace de base $[0, 1]$ est muni de la mesure de probablité μ). De plus, on *peut calculer la variance σ^2 :*

$$\sigma^2 = \int_{[0,1]} f^2 \, \mathrm{d}\mu + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0,1]} f \cdot f \circ T^n \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Dans le cadre de la théorie ergodique en mesure infinie, on dispose d'un certain nombre de résultats de convergence, dont certains ont été brièvement exposés en sous-sections 2.2 et 2.3. S'ils sont pertinents quand ils sont appliqués à des fonctions de moyenne non nulle, ils sont en revanche peu précis quand on étudie la convergence des moyennes empiriques de fonctions de moyenne nulle. Il n'existe presque aucun résultat en mesure infinie qui pourrait être équivalent au théorème central limite. L'un des seuls qui existent est le suivant (théorème 11.24 de [5]) :

Proposition 3.2.
Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), T_{MA}, \mathrm{Leb}$ *le système dynamique (« marche aléatoire ») défini en sous-section 1.2. Posons* $f := 1_{[0,1]} - 1_{[1,2]}$. *Alors :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = 2^{\frac{3}{4}} 3^{\frac{1}{2}} |N_1|^{\frac{1}{2}} N_2,$$

où N_1 *et* N_2 *sont deux gaussiennes indépendantes de variance* 1 *et où la convergence se fait en loi quand* x *est choisi de façon uniforme sur* $[0,1]$.

Ici, $|N_1|$ est une distribution de Mittag-Leffler d'ordre 1/2, et N_2 provient d'un théorème central limite judicieusement appliqué. Un des objectifs de ma thèse est de voir dans quelle mesure ce résultat peut se généraliser.

Références

[1] J. Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory*, American Mathematical Society, 1997.

[2] B. Hasselblatt et A. Katok, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1996.

[3] C. Liverani, B. Saussol et S. Vaienti, *A probabilistic approach to intermittency*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 19 (1999), 671–685.

[4] I. Melbourne et D. Theresiu, *Operator renewal theory and mixing rates for dynamical systems with infinite measure*, preprint.

[5] P. Révész, *Random walk in random and non-random environments*, World Scientific, 2005.

[6] M. Thaler, *A limit theorem for the Perron-Frobenius operator of transformations on* $[0,1]$ *with indifferent fixed points*, Israeli Journal of Mathematics, 91 (1995), 111–127.