L’enseignement au département de mathématiques et applications offre une formation en trois ans de haut niveau scientifique : la FIMFA, formation interuniversitaire de mathématiques fondamentales et appliquées. Cette formation d’effectif sélectionné réduit (une cinquantaine d’étudiants par an, dont une majorité d’élèves de l’E.N.S.) est axée sur les mathématiques et leurs applications. Les objectifs visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu’une multidisciplinarité équilibrée. Commune aux Universités Pierre et Marie Curie, Paris Diderot, Paris Dauphine, Paris-Sud 11, Paris 13 Nord et à l’École Normale Supérieure, la FIMFA comprend la validation de deux diplômes nationaux : la licence et le master. Elle permet la validation d’un diplôme d’établissement, le Diplôme de l’École Normale Supérieure (ès Mathématiques).

Directeur de la FIMFA : Olivier Biquard
Directeur des études : Claude Viterbo
Secrétariat : Laurence Vincent

École normale supérieure
Département de mathématiques
45 rue d’Ulm — 75230 Paris cedex 05
Tél : 01 44 32 31 72
Fax : 01 44 32 20 80
Mél : *laurence.vincent@ens.fr*
Page d’accueil : *http://www.fimfa.ens.fr*

Table des matières :

PRÉSENTATION

OBJECTIFS

L'enseignement en mathématiques à l'ENS vise à assurer une formation originale d'excellence de mathématiciens purs et appliqués, ayant acquis de solides connaissances dans d'autres disciplines (informatique, physique, biologie,…). Il s'agit d'une formation à la recherche et par la recherche. L'atout majeur de cette formation est un rythme plus rapide rendu possible grâce à un encadrement renforcé, en particulier par un tutorat individuel. Plusieurs cursus sont possibles dont des cursus interdisciplinaires. En fin de formation, les étudiants produisent un document récapitulant leurs réalisations, appelé mémoire de troisième année.

DÉBOUCHÉS

À la sortie de la formation, l'étudiant peut poursuivre des études de mathématiques en préparant un doctorat. Il peut également prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, une fois la thèse éventuelle achevée, les débouchés possibles sont les suivants :

• chercheur en mathématiques pures ou appliquées dans un organisme de recherche public (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES, ...) ou privé (dont secteurs bancaires, assurances,…) ;
• enseignant-chercheur à l'Université ;
• ingénieur mathématicien dans l'industrie ;
• enseignant en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat.

Des passerelles sont possibles en cours de scolarité vers les formations proposées par d'autres départements de l'ENS, dont l'informatique, la physique, l'économie, la biologie.

Des possibilités de sortie en cours de formation vers les filières universitaires peuvent être aménagées en accord avec les universités partenaires.

CANDIDATURE 2011/2012

Le recrutement est effectué sur dossier et entretien. Il est ouvert aux étudiants ayant validé les deux premières années de la licence ou d'un diplôme étranger de même niveau. Les étudiants des échanges internationaux de l'ENS peuvent candidater tout au long de l'année précédant la rentrée scolaire concernée, et peuvent être dispensés d'entretiens. La sélection est rigoureuse.

La candidature s'effectue en deux étapes.

1ère étape : remplir en ligne la déclaration informatique de candidature au Diplôme de l'ENS sur le site http://www.ens.fr/. Comme département de candidature, indiquer le Département de Mathématiques et Applications. Imprimer une copie de cette déclaration et la signer.

2ème étape : envoyer un dossier de candidature au secrétariat enseignement du département de mathématiques. Ce dossier est composé des pièces suivantes :

- Impression signée de la déclaration de candidature au diplôme de l'ENS.
- Curriculum vitae.
- Lettre de motivation.
- Une photocopie des diplômes (Baccalauréat et diplômes universitaires).
- Pour les étudiants des universités, un relevé des résultats des examens passés depuis l'entrée à l'Université, et notamment des contrôles subis durant l'année universitaire en cours.
- Pour les élèves des classes préparatoires, une copie des bulletins trimestriels depuis la première année, et éventuellement des résultats déjà obtenus aux concours (admissibilités et admissions).
- Lettres de recommandation si possible.
- Éventuellement, rapport de stage ou travail personnel.
- Une enveloppe affranchie au tarif normal, portant l'adresse à laquelle seront envoyés les résultats.
- Une photographie d'identité (à agrafer sur le dossier de candidature).

Le dossier est à adresser à :

DMA – FIMFA
École normale supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05

1ère session :

La date limite de la saisie de la déclaration informatique d'inscription au diplôme et de la réception du dossier par le secrétariat enseignement du département de mathématiques est le **jeudi 30 juin 2011.** Les candidats sélectionnés par le département de mathématiques seront convoqués à un entretien de motivation le **lundi 4 juillet 2011.**

Les dossiers des élèves de classe préparatoire ne seront pas examinés lors de la première procédure. Nous attendons les résultats des concours. Les autres candidats sont vivement invités à présenter leur dossier dès la première procédure.

2ème session :

La date limite de la saisie de la déclaration informatique d'inscription au diplôme et de la réception du dossier par le secrétariat enseignement du département de mathématiques est le **20 juillet 2011.** Les candidats sélectionnés par le département de mathématiques seront convoqués à un entretien de motivation le **vendredi 2 septembre 2011.**

Les candidats retenus par le jury du département de mathématiques seront proposés au jury de recrutement du Diplôme de l'ENS.

INSCRIPTION À L'UNIVERSITÉ

Après leur admission à laFIMFA, les étudiants s'inscrivent auprès des universités partenaires via le secrétariat enseignement de la FIMFA. Au cours de leurs études, ils doivent en particulier obtenir les diplômes nationaux de licence et de master, qui leur seront délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement selon les modalités décrites ci-après.

- Ces diplômes sanctionnent, en ce qui concerne les niveaux L3 et M1, la réussite aux Parcours FIMFA-ENS cohabilités par les universités partenaires. Les jurys de L3 et M1 sont ceux proposés par la FIMFA (commission des études). Les relevés de notes (avec la mention des nombres d'ECTS « Europeen Credit Transfert System ») sont fournis sur simple demande par le secrétariat de la FIMFA.
- Pour la seconde année de master (M2), les étudiants sont encouragés à s'inscrire dans les universités françaises ou européennes. Ces diplômes sont délivrés par ces universités.
- Étant titulaires du master, les étudiants qui le désirent peuvent à l'issue de la dernière année de la formation préparer une thèse de doctorat, sous réserve de l'accord d'un directeur de recherche ainsi que des divers encadrants de l'université d'inscription (délégués aux thèses, directeur de l'école doctorale de rattachement, directeur du laboratoire d'accueil).

TUTORAT

L'encadrement des étudiants en mathématiques est assuré par un système de tutorat individualisé, et supervisé par le directeur des études. Chaque année, un tuteur, membre du département de mathématiques et applications de l'ENS ou associé, sera affecté à chaque étudiant. Aléatoire en première année, il sera, pour les autres années, fonction des thèmes de préférence indiqués lors des journées d'entretien de fin d'année. Le rôle du tuteur est d'aider l'étudiant à l'organisation de sa scolarité, de le conseiller sur ses choix de thèmes de travail et de lecture, et d'être un appui crucial pour son orientation. Au début de chaque année, un programme d'études sera mis au point par l'étudiant, son tuteur et le directeur des études, et signé par ces parties. Il est vivement recommandé d'aller voir régulièrement son tuteur.

STAGE

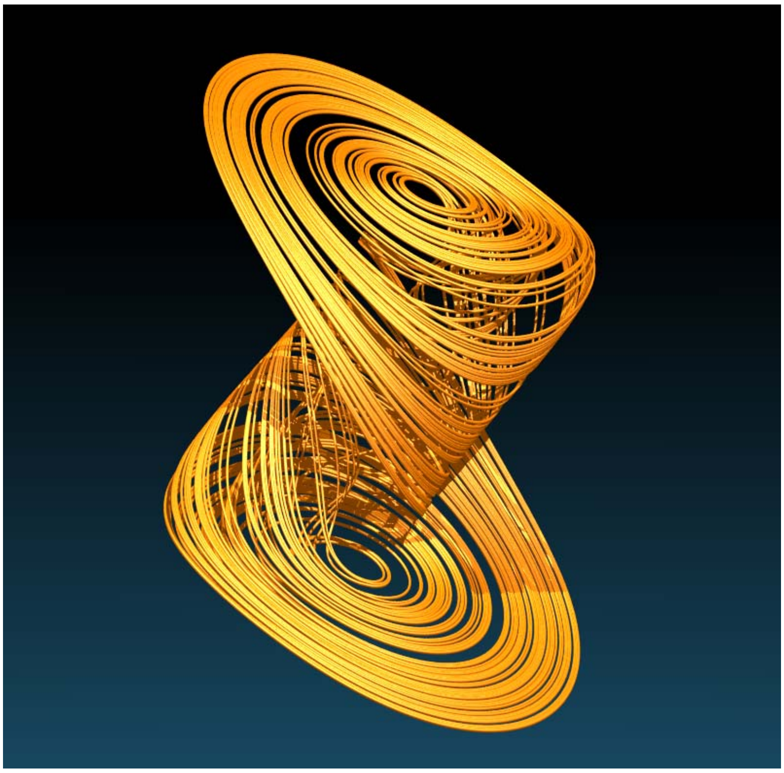
La scolarité en mathématiques comprend normalement un stage d'au moins 4 mois, à l'étranger de préférence. Ce stage a pour but de familiariser l'étudiant à un environnement différent : thématiques différentes, système d'enseignement différent, contacts humains différents, découverte du milieu économique.

La plus grande souplesse est laissée aux étudiants pour ce stage et une certaine initiative est demandée en contrepartie. Le positionnement de ce stage dans les trois années en enseignement ou en recherche, le thème scientifique, l'aspect linguistique sont autant de paramètres à prendre en compte et cela nécessite d'y réfléchir bien à l'avance, d'en parler avec son tuteur et aux responsables au DMA.

Pour aider à mettre en place ce stage, les membres du département de mathématiques proposent des universités d'accueil et des encadrants potentiels pour des séjours à l'étranger, dans diverses thématiques, de niveau M2 ou plus. Une liste partielle est disponible sur le site de l'enseignement du département de mathématiques (les étudiants ne sont pas supposés contacter directement les encadrants étrangers proposés, mais par l'intermédiaire des membres du Département de mathématiques concernés). De plus, le département de mathématiques possède des accords internationaux (souvent au niveau enseignement) que l'on peut trouver sur la page électronique du département, comme l'échange franco-indien, et l'ENS a des accords d'échanges avec diverses institutions, dont la liste est disponible à la direction des relations internationales. Le site enseignement du département de mathématiques propose aussi des listes de stages et des principaux centres de recherche internationaux qui organisent des « semestres thématiques ».

SÉMINAIRE « DES MATHÉMATIQUES »

Le séminaire « Des Mathématiques » a lieu deux fois par mois après le thé du département de mathématiques et s'adresse à tous. Le suivi de ces exposés ne demande pas de prérequis. C'est souvent l'occasion de découvrir un champ de recherches mathématiques.



ENSEIGNEMENTS

ORGANISATION DE LA FORMATION

Les cursus sont individuels, et mis au point en particulier au début de chaque année avec le tuteur, le directeur des études et les encadrants du département de mathématiques. De nombreuses déclinaisons de cursus sont possibles.

- La filière Mathématiques
- La filière Mathématiques-Informatique
- La filière Mathématiques-Physique
- La filière Mathématiques-Biologie

Les filières interdisciplinaires permettent, sous réserve de confirmation par le jury compétent, la validation d'une seconde spécialité pour le Diplôme de l'ENS.

L'équipe d'encadrement pourra examiner toute proposition individuelle cohérente de cursus présentée par les étudiants et s'inscrivant dans l'esprit de la formation. De façon générale, les élèves doivent obtenir l'aval de leur tuteur et du directeur des études ou de la FIMFA pour tous les choix concernant leur programme d'études.

PREMIÈRE ANNÉE

Les étudiants sont inscrits en troisième année de licence (L3). Ils suivent aussi des cours de la première année de master (M1) dont la validation sera effective en seconde année avec l'inscription administrative en M1. La formation comporte également des cours d'informatique, de physique, d'économie ou de biologie. La validation de la première année nécessite la rédaction d'un mémoire, dit de première année, au second semestre.

DEUXIÈME ANNÉE

Les étudiants sont inscrits en première année de master (M1). Les étudiants ont aussi la possibilité de suivre des cours de seconde année de master (M2) ayant lieu dans les universités partenaires dont la validation sera effective en troisième année avec l'inscription administrative en M2. En parallèle sont proposés des groupes de travail et des mini-cours de niveau recherche assurés par des spécialistes. Au second semestre, les étudiants ont le choix d'effectuer un stage long à l'étranger ou en province ou de suivre les « leçons de mathématiques ».

TROISIÈME ANNÉE

Durant cette troisième année de la formation, l'étudiant valide la deuxième année du master (M2), en la complétant à partir des examens déjà passés en deuxième année. Avec son tuteur, il décide des compléments à apporter à sa formation : stage, groupes de travail, cours supplémentaires…

En fin d'année, les étudiants composent un mémoire dit de troisième année, qui récapitule tous les travaux personnels réalisés pendant leur scolarité, en y ajoutant une présentation d'un domaine de recherche. Ce mémoire fait l'objet d'une soutenance orale obligatoire pour validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques.

RÈGLES D'OBTENTION

Un enseignement de langue est obligatoire pour toutes les filières (sauf cas particulier). Il peut être validé par un cours du département des langues de l'ENS (ECLA), ou par un séjour longue durée dans un pays non francophone.

PREMIÈRE ANNÉE

Filière mathématique

L'obtention de la licence nécessite :

- Quatre cours de mathématiques de niveau licence, équivalents à 48 ECTS parmi :
  - Topologie, Analyse et calcul différentiel (12 ECTS)
  - Intégration et probabilités (12 ECTS)
  - Algèbre I (12 ECTS)
  - Analyse complexe et harmonique (12 ECTS)
  - Logique (12 ECTS)

  Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1 fondamental de 12 ECTS.

- Et le mémoire et l'exposé de première année 12 ECTS

L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 :

- Un cours dans une discipline autre que les mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie…) en accord avec le tuteur.
  Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en cours non-mathématiques sur les deux premières années.

- Un cours fondamental de M1 de mathématiques parmi :
  Analyse fonctionnelle et EDP (12 ECTS)
  Géométrie différentielle (12 ECTS)
  Processus aléatoires (12 ECTS)
  Algèbre 2 (12 ECTS)
  Analyse complexe et harmonique (MMF) - comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
  Logique (MMF) - comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3

- Un groupe de lecture (6 ECTS)

Filières pluridisciplinaires

Ces cursus sont exigeants et sont une spécificité de l'ENS.

Mathématiques-Physique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 de physique. La filière mathématique-physique est organisée conjointement par le département de mathématiques et le département de physique de l'ENS.

Elle permet :
- aux étudiants motivés de poursuivre une double formation en mathématique et en physique, ce qui leur donne par la suite la possibilité de travailler dans des domaines en pleine expansion, à l'interface des deux disciplines (physique théorique et théorie des champs, physique des plasmas et théorie cinétique, physique quantique et équations aux dérivées partielles variationnelles, physique statistique et probabilités) ;
- aux étudiants encore indécis de repousser d'une année le choix entre ces deux disciplines.

L'obtention de la licence de mathématiques nécessite :

- Quatre cours de mathématiques de niveau licence, équivalents à 48 ECTS, parmi :
  Topologie, Analyse et calcul différentiel (12 ECTS)
  Intégration et probabilités (12 ECTS)
  Algèbre I (12 ECTS)
  Analyse complexe et harmonique (12 ECTS)
  Logique (12 ECTS)

Un cours de L3 peut être remplacé par un cours fondamental de M1 à 12 ECTS

- Un cours spécifique à la filière : Systèmes de particules et équations aux dérivées partielles (12 ECTS)

.

L'obtention de la licence de physique nécessite :

- Des cours de physique de niveau licence recommandés par la FIP équivalents à 36 ECTS
  Physique statistique des systèmes en équilibre (1er sem) (9 ECTS)
  Introduction à la mécanique quantique (1er sem) (9 ECTS)
  Relativité et électromagnétisme (2ème sem) (9 ECTS)
  Applications de la mécanique quantique (2ème sem) (9 ECTS)
  Thermodynamique à l'équilibre et hors équilibre (2ème sem) (9 ECTS)

- le stage et l'exposé du cursus maths/physique (24 ECTS). Ce stage est co-encadré par des chercheurs des deux disciplines.

Mathématiques-Informatique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 d'informatique. La filière mathématique-informatique est organisée conjointement par le département de mathématiques et le département d'informatique de l'ENS.

Elle permet :
- aux étudiants motivés de poursuivre une double formation en mathématique et en informatique.
- aux étudiants encore indécis de repousser d'une année le choix entre ces deux disciplines.

L'obtention de la licence de mathématiques nécessite :

- Quatre cours de mathématiques de niveau licence, équivalents à 48 ECTS :

  Analyse complexe et harmonique et Logique sont obligatoires (12 ECTS chacun)

  2 cours parmi les 4 proposés :

  Intégration et probabilités (12 ECTS)
  Algèbre I (12 ECTS)

Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1fondamental à 12 ECTS.

Algèbre 2 (12 ECTS)

Processus aléatoires (12 ECTS)

- Un cours spécifique à la filière : Apprentissage statistique (12 ECTS)

L'obtention de la licence d'informatique nécessite :

- 6 cours d'informatique à 6 ECTS de niveau licence :

  Au premier semestre, Langages formels, Algorithmique et programmation, Langages de programmation et compilation, Structures et algorithmes aléatoires sont obligatoires.

  Au deuxième semestre choisir deux cours parmi :
  Bases géométriques de l'informatique
  Logique informatique
  Théorie de l'information et codage
  Initiation à la cryptologie

- Stage (12 ECTS) et exposé du cursus maths-informatique (12 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un enseignant de chaque discipline, consiste en :

Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus Mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un enseignant de mathématiques et/ou d'un enseignant d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage,

Un stage niveau L3 dans un laboratoire d'informatique,

La rédaction d'un mémoire en deux parties, et une soutenance en présence d'enseignants des deux disciplines.

A la fin de la première année, l'élève s'oriente soit vers les mathématiques soit vers la physique ou l'informatique et rejoint le département de son choix pour la deuxième année.

Mathématique-Biologie

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans les grandes avancées de la biologie ; réciproquement, l'étude du vivant est devenue source de nouveaux problèmes mathématiques, profonds et difficiles. Dans ce contexte, le cursus Mathématiques – Biologie proposé par le département de mathématiques de l'ENS, en partenariat avec le département de biologie de l'ENS, vise à former des chercheurs capables d'exprimer les problèmes biologiques en langage mathématique, de développer les idées mathématiques ainsi générées et de promouvoir les applications de ces nouvelles théories à l'analyse des systèmes biologiques qui leur ont donné naissance.

Objectifs du cursus

Les étudiants issus du cursus Mathématiques – Biologie de l'ENS maîtriseront les bases de la biologie contemporaine. Ils auront appris à décortiquer la littérature spécialisée, suivre les développements rapides sur les thèmes de pointe, et initier dialogue et collaboration avec les biologistes dans leurs laboratoires.

Structure du cursus

Le cursus Mathématiques – Biologie se déroule sur deux ans. Les élèves s'inscrivent en L3 et M1 de maths tout en suivant des cours de biologie (On notera que les cours de biologie sont ouverts à tous les étudiants du département de mathématiques ; l'inscription à ces cours n'engage donc pas les étudiants concernés à l'exécution du programme complet du cursus Mathématiques – Biologie.)

L'obtention de la licence de mathématiques nécessite :

- Quatre cours de mathématiques de niveau licence équivalents à 48 ECTS, parmi :
  Topologie, Analyse et calcul différentiel (12 ECTS – cours recommandé pour ce cursus),
  Intégration et probabilités (12 ECTS – cours recommandé pour ce cursus),
  Algèbre I (12 ECTS),
  Analyse complexe et harmonique (12 ECTS – cours recommandé pour ce cursus),
  Logique (12 ECTS).

  Ou 3 cours de niveau licence et un cours fondamental de niveau master 1.

- Le stage co-encadré et projet d'interface mathématique-biologie (12 ECTS)

L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 :

- Un cours spécifique à la filière pluridisciplinaire : Systèmes biologiques : bases et formalismes (6 ECTS)

- Groupe de lecture en biologie : Modélisation des systèmes biologiques (12 ECTS)

- L'école d'été de Biologie de Marseille-Luminy (6 ECTS)

DEUXIÈME ANNÉE

Filière mathématique

L'obtention de la première année de master nécessite :

- Au moins trois cours fondamentaux de M1 de mathématiques, équivalents au minimum à 36 ECTS parmi :
  Analyse fonctionnelle et EDP (MMF)
  Géométrie différentielle (MMF)
  Processus aléatoires (MMF)
  Algèbre 2 (MMF)
  Analyse complexe et harmonique (MMF) - comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
  Logique (MMF) - comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3

- Au moins un cours complémentaire de M1 de mathématiques à 12 ECTS parmi :

  Initiation à la modélisation et à la simulation numérique (MMC)
  Statistiques (MMC)
  Systèmes dynamiques (MMC)
  Topologie algébrique (MMC)
  EDP (MMC)

- Au moins un groupe de travail équivalent à 12 ECTS parmi :

  GT : Marches en milieu aléatoire
  GT de statistiques
  GT : Propriétés fines des fonctions : initiation à la théorie géométrique de la mesure
  GT d'analyse : Compacité et convergence faible
  GT : Géométrie hyperbolique : rigidité et flexibilité
  GT : Introduction à la K-théorie algébrique,
  GT : Approximation diophantienne
  GT : Sur les équations différentielles p-adiques

L'obtention de la seconde année nécessite en plus du M1

- Un cours dans une discipline autre que les mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie…) en accord avec le tuteur.
  Remarque : Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en cours non-mathématiques sur les deux premières années.

- Le module des leçons de mathématiques (12 ECTS)

- Imagerie mathématique — Habib Ammari
- Classification en apprentissage statistique — Sylvain Arlot
- Processus d'exclusion en mécanique statistique — Christophe Bahadoran
- Géométrie des convexes et applications — Franck Barthe
- Analyse semi-classique — Nicolas Burq
- Géométrie hyperbolique — Colin Guillarmou
- Analyse et arithmétique — Harald Helfgott
- Combinatoire en théorie des représentations — Bernard Leclerc
- Algèbres de Lie - chapitres choisis — Erhard Neher
- Systèmes dynamiques dans les espaces homogènes — Jean-François Quint
- Estimations non paramétriques — Vincent Rivoirard
- Formes normales de systèmes dynamiques et de structures géométriques — Laurent Stolovitch
- Transport optimal — Cédric Villani
- Processus de renouvellement et applications — Lorenzo Zambotti
- Théorie des modèles et corps valués — Martin Hils

Chaque leçon a une partie cours de 4h et une partie mini-groupe de travail constituée d'exposés d'élèves. Les élèves assistent à au moins 9 cours et 2 mini-groupes de travail dans lesquels ils donnent un exposé. Le module des leçons de mathématiques est remplaçable par un stage long (5 mois minimum).

De valider au moins un cours de M1 complémentaire ou bien un ou plusieurs cours de M2 équivalents à 12 ECTS.
Les élèves ayant validé deux ou trois cours de M1 en première année sont vivement encouragés à suivre au moins deux cours de M2 des universités partenaires au premier semestre.

Mathématique-Biologie

L'obtention de la première année de master nécessite :

- Au moins trois cours fondamentaux de M1 de mathématiques, équivalents au minimum à 36 ECTS parmi :
  Analyse fonctionnelle et EDP (MMF) – cours recommandé pour ce cursus
  Géométrie différentielle (MMF)
  Processus aléatoires (MMF) - cours recommandé pour ce cursus

Algèbre 2 (MMF)
Analyse complexe et harmonique (MMF) - comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
Logique (MMF) - comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3

- Au moins un cours complémentaire de M1 de mathématiques équivalent à 12 ECTS parmi :

Initiation à la modélisation et à la simulation numérique (MMC) - cours recommandé pour ce cursus
Statistiques (MMC) - cours recommandé pour ce cursus
Systèmes dynamiques (MMC) - cours recommandé pour ce cursus
Topologie algébrique (MMC)
EDP (MMC)

- Au moins un groupe de travail équivalents à 12 ECTS parmi :

GT : Marches en milieu aléatoire
GT de statistiques
GT : Propriétés fines des fonctions : initiation à la théorie géométrique de la mesure
GT d'analyse : Compacité et convergence faible
GT : Géométrie hyperbolique : rigidité et flexibilité
GT : Introduction à la K-théorie algébrique,
GT : Approximation diophantienne
GT : Sur les équations différentielles p-adiques

L'obtention de la seconde année nécessite en plus du M1

- Un cours de biologie (6 ECTS) au choix entre Biologie cellulaire et Écologie-Génétique-Évolution (voir programme des enseignements du Département de Biologie), ou le GT de première année si le sujet a changé.

- Le mini-projet de modélisation en laboratoire de biologie (6 ECTS)

- Les leçons de mathématiques ou un stage long en mathématiques ou biologie (12 ECTS)

Troisième année

L'obtention de la troisième année nécessite l'obtention de la seconde année du master (M2), la validation de cours de M2 supplémentaires ou un stage long à l'étranger, en province ou industriel. Elle nécessite aussi la composition d'un mémoire, dit *de troisième année*, formé d'un curriculum vitae, de l'ensemble des travaux écrits réalisés lors de la scolarité, et d'un texte nouveau, entre 10 et 20 pages, appelé *Présentation du domaine de recherche*, présentant de manière motivée le domaine de recherche dans lequel se placera une éventuelle thèse. Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale, dite *exposé de troisième année*.

COURS DE L'ANNÉE SCOLAIRE 2011/2012

PREMIÈRE ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

• Algèbre 1 (12 ECTS) [LM] (60h : 36h cours + 24h TD) — O. Biquard ENS/UPMC; *N. Ratazzi Paris Sud*

• Intégration et probabilités (12 ECTS) [LM] (60h : 36h cours + 24h TD) — Z. Shi UPMC; *P. Bertin ENS*

• Topologie et calcul différentiel (12 ECTS) [LM] (60h : 36h cours + 24h TD) — J.-M. Delort Paris Nord; G. Ginot UPMC

• Logique (12 ECTS) [LM, MMF] (60h : 36h cours + 24h TD) — M. Hils Paris Diderot; *P. Simon ENS*

• Groupe de lecture 1 : (6 ECTS) [LM] — C. Boutillier UPMC

• Groupe de lecture 2 : (6 ECTS) [LM] — P. Bernard Paris Dauphine

Deuxième semestre :

• Analyse complexe et harmonique (12 ECTS) [LM, MMF] (60h : 36h cours + 24h TD) — W. Werner ENS/Paris Sud; *O. Taïbi ENS*

• Analyse fonctionnelle (12 ECTS) [MMF] (60h : 36h cours + 24h TD) — L. Saint-Raymond ENS/UPMC; *C. Huneau ENS*

• Géométrie différentielle (12 ECTS) [MMF] (60h : 36h cours + 24h TD) — C. Viterbo ENS/Paris Sud; *O. Benoist ENS*

• Processus aléatoires (12 ECTS) [MMF] (60h : 36h cours + 24h TD) — J. Garnier Paris Diderot; N. Curien *ENS*

• Algèbre 2 (12 ECTS) (60h : 36h cours + 24h TD) [MMF] — O. Debarre ENS/Paris Diderot; *T. Ly ENS*

• Groupe de lecture 3 : (6 ECTS) [LM] — L. Zambotti UPMC

• Groupe de lecture 4 : (6 ECTS) [LM] — G. Ginot UPMC

Cours non mathématiques

Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en cours non-mathématiques sur les deux premières années. Toute autre proposition pourra être étudiée avec le tuteur.

• Cours d'économie - http://www.sciences-sociales.ens.fr/-ECONOMIE-.html

Introduction à l'économie, P. Askenazy
Introduction aux théories de la croissance économique, D. Cohen
Introduction aux problèmes économiques contemporains, G. Ponthière

• Cours de biologie - http://www.biologie.ens.fr/depbio/spip.php?rubrique37

Systèmes biologiques : bases et formalisme

• Cours de physique - http://www.phys.ens.fr/spip.php?rubrique49

Physique statistique des systèmes en équilibre
Introduction à la mécanique quantique
Relativité et électromagnétisme
Introduction à la physique de la matière condensée
Thermodynamique à l'équilibre et hors équilibre

• Cours d'informatique - http://diplome.di.ens.fr/

Langages formels,
Algorithmique et programmation,
Langages de programmation et compilation,
Structures et algorithmes aléatoires
Bases géométriques de l'informatique
Logique informatique
Théorie de l'information et codage
Initiation à la cryptologie

Exposé de première année (12 ECTS) : Il s'agit d'une initiation à un thème de recherche actuel. Il s'effectue en binôme sous la direction d'un encadrant appartenant le plus souvent au département de mathématiques de l'ENS ou en laboratoire pour les sujets relevant des filières interdisciplinaires de la FIMFA. Il s'agit en général de la présentation d'un article de recherche dont les prérequis ne dépassent pas le niveau de la première année de la FIMFA. Une liste de sujets (non limitative) est présentée au mois de janvier y compris ceux des filières interdisciplinaires.
Le travail consiste en la rédaction d'un texte de synthèse, dit *mémoire de première année*, et d'un exposé. Cet exposé a lieu en général dans la dernière semaine de juin. Les qualités de rédaction et d'exposition (clarté, concision, aisance) sont importantes.

Cours spécifiques aux filières pluridisciplinaires
Premier semestre :

• Systèmes biologiques : bases et formalismes (30h cours) (6 ECTS) — R. Ferrière ENS, D. Thieffry ENS

Deuxième semestre :

• Apprentissage (50h cours + 10h exposés) (12 ECTS) — S. Arlot - F. Bach - O. Catoni, G. Obozinski - G. Stoltz

• Systèmes de particules et équations aux dérivées partielles (50h cours + 10h exposés) (12 ECTS) — C. Mouhot CNRS/ENS, V. Kazakov ENS/UPMC

• Groupe de lecture en biologie : Modélisation des systèmes biologiques (12 ECTS) — R. Ferrière ENS, D. Thieffry ENS, A.Véber Polytechnique

Stage et exposé du cursus maths-physique (24 ECTS)
Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un enseignant de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus Mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un enseignant de mathématiques et/ou d'un enseignant de physique, sur un sujet relié à celui du stage,

- Un stage niveau L3 dans un laboratoire de physique (12 ECTS),

Stage (12 ECTS) et exposé du cursus maths-informatique (12 ECTS)
Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un enseignant de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus Mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un enseignant de mathématiques et/ou d'un enseignant d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage,

- Un stage niveau L3 dans un laboratoire d'informatique,

- La rédaction d'un mémoire en deux parties, et une soutenance en présence d'enseignants des deux disciplines.

Stage co-encadré et mini projet d'interface mathématique-biologie (12 ECTS)

Les étudiants réaliseront un mini-projet sous un double encadrement (mathématiques et biologie) à partir d'un article de recherche exploitant les mathématiques associées à un thème biologique étudié

en cours. Ce travail donnera lieu en fin d'année à la rédaction d'un court rapport et la présentation d'un exposé ou d'un poster.
Prérequis : Cours de S1 “Systèmes biologiques : bases et formalismes”.

SECONDE ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

- Logique (12 ECTS) [LM, MMF] — M. Hils Paris Diderot
  (60h : 36h cours + 24h TD) — *P. Simon ENS*

- Initiation à la modélisation et à la simulation numérique (12 ECTS) — B. Desjardins ENS
  (30h cours + 20h TD) [MMC] — T. Goudon ENS

- Statistique (12 ECTS) [MMC] — G. Biau UPMC
  (30h cours + 20h TD) — *B. Haas Paris Dauphine*

- Systèmes dynamiques (12 ECTS) [MMC] — F. Béguin Paris Sud
  (30h cours + 20h TD) — *D. Han-Kwan ENS*

- Topologie algébrique (12 ECTS) [MMC] — G. Powell CNRS/Paris Nord
  (30h cours + 20h TD) — *L. Fu ENS*

- Analyse des équations aux dérivées partielles (12 ECTS) [MMC] — N. Burq Paris Sud
  (30h cours + 20hTD) — *B. Texier Paris Diderot*

Deuxième semestre :

- Analyse complexe et harmonique (12 ECTS) [LM, MMF] — W. Werner ENS/Paris Sud
  (60h : 36h cours + 24h TD) — *O. Taïbi ENS*

- Analyse fonctionnelle (12 ECTS) [MMF] — L. Saint-Raymond ENS/UPMC
  (60h : 36h cours + 24h TD) — *C. Huneau ENS*

- Géométrie différentielle (12 ECTS) [MMF] — C. Viterbo ENS/Paris Sud
  (60h : 36h cours + 24h TD) — *O. Benoist ENS*

- Processus aléatoires (12 ECTS) [MMF] — J. Garnier Pa ris Diderot
  (60h : 36h cours + 24h TD) — *N. Curien ENS*

- Algèbre 2 (12 ECTS) — O. Debarre ENS/Paris Diderot
  (60h : 36h cours + 24h TD) [MMF] — *T. Ly ENS*

Leçons de mathématiques, deuxième semestre : Laure Saint-Raymond

- Imagerie mathématique Habib Ammari
- Classification en apprentissage statistique Sylvain Arlot
- Processus d'exclusion en mécanique statistique Christophe Bahadoran
- Géométrie des convexes et applications Franck Barthe
- Analyse semi-classique Nicolas Burq
- Géométrie hyperbolique Colin Guillarmou
- Analyse et arithmétique Harald Helfgott
- Combinatoire en théorie des représentations Bernard Leclerc
- Algèbres de Lie - chapitres choisis Erhard Neher
- Systèmes dynamiques dans les espaces homogènes Jean-François Quint
- Estimations non paramétriques Vincent Rivoirard
- Formes normales de systèmes dynamiques et de structures géométriques Laurent Stolovitch
- Transport optimal Cédric Villani
- Processus de renouvellement et applications Lorenzo Zambotti
- Théorie des modèles et corps valués Martin Hils

Groupes de travail, Premier semestre :

GT : Marches en milieu aléatoire P. Bertin -T. Bodineau
GT de statistiques G. Biau - O. Catoni – G. Stoltz
GT : Propriétés fines des fonctions : initiation à la théorie géométrique de la mesure P. Bernard
GT d'analyse : Compacité et convergence faible A. L. Dalibard - D. Lannes
GT: Géométrie hyperbolique : rigidité et flexibilité O. Guichard
GT: Introduction à la K-théorie algébrique P. Gille – O. Wittenberg
GT: Approximation diophantienne S. Cantat – N. Ratazzi

Groupe de travail, Deuxième semestre :

GT : Sur les équations différentielles p-adiques Y. André

Cours non mathématiques :

- **Cours d'économie** - http://www.sciences-sociales.ens.fr/-ECONOMIE-.html

Introduction à l'économie, P. Askenazy
Introduction aux théories de la croissance économique, D. Cohen
Introduction aux problèmes économiques contemporains, G. Ponthière

- **Cours de biologie** - http://www.biologie.ens.fr/depbio/spip.php?rubrique37

Systèmes biologiques : bases et formalisme

• **Cours de physique** - http://www.phys.ens.fr/spip.php?rubrique49

- les cours de premier semestre de L3 (mécanique quantique et physique statistique),
- le cours de relativité générale, premier semestre M1,
- le cours du cursus mixte,
- le cours de relativité restreinte, 2e semestre L3,

et, pour ceux qui auraient suivi en première année un cours de physique du premier semestre L3, la suite de ce cours, au 2e semestre L3.

• **Cours d'informatique** - http://diplome.di.ens.fr/

Langages formels,
Algorithmique et programmation,
Langages de programmation et compilation,
Structures et algorithmes aléatoires
Bases géométriques de l'informatique
Logique informatique
Théorie de l'information et codage
Initiation à la cryptologie

PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2011/2012

Algèbre 1

(Olivier Biquard)

1) Groupes, action d'un groupe sur un ensemble. Groupe symétrique. Sous-groupes distingués et groupes quotients, produits semi-directs de groupes et extensions de groupes. Groupe des éléments inversibles d'un groupe cyclique, applications arithmétiques.

2) Groupes et géométrie : groupe linéaire, groupe orthogonal, groupes classiques. Formes quadratiques. Formes hermitiennes et formes alternées.

3) Algèbre multilinéaire : produit tensoriel, algèbre tensorielle, algèbre symétrique, algèbre extérieure.

4) Éléments de théorie des représentations des groupes finis, théorie des caractères.

Intégration et probabilités

(Zhan Shi)

I. INTÉGRATION
1. Espaces mesurés
2. Intégration par rapport à une mesure
3. Construction de mesures
4. Espaces L^p
5. Mesures produits
6. Mesures signées
7. Formule de changement de variables

II. PROBABILITÉS
1. Fondements de la théorie des probabilités
2. Indépendance
3. Convergence de variables aléatoires

Topologie et calcul différentiel

(Jean-Marc Delort)

1) Topologie générale : Définitions, topologie produit, topologie quotient, exemples de topologies (topologie de Schwartz,...). Espaces topologiques connexes, compacts, espaces vectoriels topologiques, limites et valeurs d'adhérence, semi-continuité, théorème de Tietze-Urysohn. Théorie de Baire, théorème de Tychonoff. Théorèmes du point fixe, théorème d'Ascoli, théorème de Stone-Weierstrass, théorème de Hahn-Banach et Banach-Steinhaus.

2) Calcul différentiel banachique : théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites et du rang constant.

3) Espaces de Hilbert : convexité, dualité, bases hilbertiennes, exemple des séries de Fourier, théorème spectral.

4) Équations différentielles ordinaires : théorème de Cauchy-Lipschitz, flots de champs de vecteurs, linéarisation.

Bibliographie:
[1] V. Arnold, Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, Grund. math. Wiss. 250, Springer Verlag, 1983.
[2] N. Bourbaki, Topologie générale, chap. 1 à 4, Hermann, 1971.
[3] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, 2nde éd.1977.
[4] J. Dieudonné, Éléments d'analyse, Gauthier-Villars, 1979.
[5] J. Dugundji, Topology, Wm. C. Brown Pub., 1989.
[6] L. Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris, 1970.

Logique

(Martin Hils)

1) Théorie naïve des ensembles

- Théorème de Cantor-Bernstein
- Ordinaux et cardinaux
- Les différentes formes de l'axiome du choix

2) Théorie des modèles

- Langages, structures, formules, théories, modèles

• Théorèmes de complétude et de compacité
• Théorèmes de Löwenheim-Skolem
• Critères d'élimination des quantificateurs
• Une application à l'algèbre : Théorème d'Ax sur les fonctions polynomiales injectives.

3) Récursivité, indécidabilité, incomplétude

• Fonctions récursives
• Arithmétique de Peano, indécidabilité de l'arithmétique
• Théorèmes d'incomplétude de Gödel.

4) Retour à la théorie des ensembles

• Les axiomes de Zermelo-Frankel
• Modèles de la théorie des ensembles et hypothèse du continu

Groupe de lecture : "Introduction à la géométrie des espaces métriques"

(Patrick Bernard)

La géométrie des espaces métriques est un sujet très actif et dont les premiers pas demeurent assez accessibles. Nous les aborderons sur la base du livre "A course in metric Geometry", de D. Burago, Y. Burago et S. Ivanov. Les étudiants voulant aller plus loin pourront consulter le livre de Gromov "Structure metrique pour les varietes Riemanienne" (ou sa version anglaise enrichie).

Groupe de lecture : Quelques aspects de la théorie des graphes

(Cédric Boutillier)

Un graphe G est la donnée d'un ensemble de sommets, et d'un ensemble d'arêtes pouvant connecter des paires de sommets.
Les graphes sont des objets centraux en combinatoire, mais apparaissent aussi souvent dans d'autres branches des mathématiques. Nous nous proposons d'étudier quelques propriétés de ces objets, notamment :
- le lien entre la géométrie d'un graphe et les propriétés algébriques d'opérateurs naturellement associés ;
- l'interprétation en termes de réseaux électriques ;
- les problèmes de coloriage ;
- les problèmes de flots et de couplages.
Dans une deuxième partie, nous pourrons nous intéresser à quelques propriétés typiques des graphes avec un grand nombre de sommets, en utilisant de manière élémentaire un peu de probabilités.

Références :
[1] Bollobás, Béla. Modern graph theory. Graduate Texts in Mathematics, 184.
Springer-Verlag, New York, 1998. xiv+394 pp. ISBN: 0-387-98488-7
[2] Biggs, Norman. Algebraic graph theory. Second edition. Cambridge Mathematical Library.
Cambridge University Press, Cambridge, 1993. viii+205 pp. ISBN: 0-521-45897-8

Analyse complexe et harmonique

(Wendelin Werner)

Fonctions harmoniques discrètes, fonctions harmoniques, problème de Dirichlet, Noyau de Poisson, fonctions harmoniques conjuguées, principe de réflexion.

Définition et premières propriétés des fonctions analytiques, exemples.

Transformations conformes: Théorème de Riemann, exemples.

Formule de Cauchy et applications, fonctions méromorphes, résidus.

Quelques considérations sur la fonction zeta et sur les fonctions elliptiques.

Référence: L.V. Ahlfors, Complex Analysis, 3rd Ed., McGraw-Hill

Analyse fonctionnelle

(Laure Saint-Raymond)

I. **Dualité, distributions**
- rappels de théorie de la mesure
- distributions
- l'équation de Burgers

II. **Analyse de Fourier, espaces de Sobolev**
- rappels sur les séries de Fourier et définition de la transformée de Fourier continue
- espaces de Sobolev, injections compactes
- multiplicateurs de Fourier et opérateurs singuliers (peut-être sur un exemple)

III. **Analyse convexe**
- théorèmes de Hahn-Banach
- transformation de Fenchel
- un exemple d'application

Géométrie différentielle

(Claude Viterbo)

1/ Variétés différentielles :

Définitions, applications différentiables entre variétés, sous-variétés, produits et revêtements de variétés, fibré tangent, application tangente. Exemples : sphères, tores, espaces projectifs, grassmaniennes. Théorème de Whitney. Immersions, submersions, fibrations, théorème de Sard. Champs de vecteurs, flot d'un champ de vecteurs. Théorème de Frobenius.

2/ Formes différentielles :

Définitions, produit extérieur, dérivation extérieure. Cohomologie de de Rham. Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes, dualité de Poincaré.

3/ Topologie différentielle :

Théorie du degré, indice de champs de vecteurs.

4/ Introduction aux groupes et algèbres de Lie. Espaces homogènes.

Bibliographie:

[God] C. Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann, 1971.
[Hir] M. Hirsch, Differential topology, GTM 33, Springer, 1976.
[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Press.Univ.Grenoble, 1996.
[Mil] J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1965.
[Spi] M. Spivak, Differential geometry, Publish or Perish, 1979.

Processus stochastiques

(Josselin Garnier)

1) Conditionnement
2) Martingales à temps discret : exemples et théorèmes de convergence
3) Chaines de Markov à temps discret et espace d'état dénombrable : propriété de Markov forte, classification des états, mesure invariante, théorèmes limites, convergence vers la loi stationnaire.
4) Mouvement brownien
5) a) Introduction aux martingales à temps continu et aux chaînes de Markov à temps continu
   b) Introduction aux grandes déviations
   c) Introduction à la théorie ergodique

Bibliographie:

[1] R. Durrett (1996), Probability : Theory and Examples, Duxbury Press.
[2] G. Grimmett and D. Stirzaker (1992), Probability and Random Processes, Oxford University Press.
[3] D. Williams (1991), Probability with martingales, Cambridge

Algèbre 2

(Olivier Debarre)

Ce cours est une introduction au vocabulaire, aux problèmes et aux techniques classiques d'algèbre commutative. Ses prérequis sont un peu de théorie des groupes, de familiarité avec l'algèbre linéaire dans les espaces vectoriels, et de connaissance du vocabulaire de base de la théorie des anneaux.

Nous commencerons par les extensions de corps et leurs applications aux constructions à la règle et au compas et terminons sur la correspondance de Galois, qui attache à certaines extensions de corps finies un groupe fini (son « groupe de Galois ») et établit une correspondance bijective entre les sous-extensions de l'extension et les sous-groupes du groupe de Galois. Ses premières applications concernent la résolubilité des équations polynomiales par radicaux.

Nous décrirons ensuite la structure des modules de type fini sur un anneau principal et ses applications aux groupes abéliens de type fini et à la réduction des endomorphismes des espaces vectoriels de dimension finie.

Enfin, nous nous lancerons dans la « vraie » algèbre commutative. Le domaine est vaste et nous ne pourrons en aborder que quelques points : décomposition primaire des idéaux dans un anneau noethérien (une vaste généralisation de la décomposition en produit d'irréductibles dans les anneaux factoriels), topologie de Zariski sur le spectre d'un anneau (ou comment faire intervenir de la « géométrie » en algèbre), dimension de Krull d'un anneau, extensions d'anneaux, théorème des zéros de Hilbert (c'est le fameux «Nullstellensatz », qui permet d'identifier les idéaux maximaux d'un anneau de polynômes sur un corps), théorème de Cohen-Seidenberg (très utile pour calculer la dimension d'anneaux), bases et degré de transcendance.

Bien que les outils plus modernes ne soient pas introduits dans ce cours (en particulier, l'algèbre homologique), il vous permettra d'être bien préparé pour des cours plus avancés de théorie des nombres ou de géométrie algébrique (en particulier, la théorie des schémas).

Chapitre I : Extensions de corps

Anneaux : idéaux, divisibilité, irréductibilité, anneaux principaux, anneaux euclidiens.
Corps : extensions de corps, éléments algébriques et transcendants, constructions à la règle et au compas.
Polynômes et racines : corps de rupture, corps de décomposition, clôture algébrique.
Extensions normales.
Séparabilité : polynômes séparables, corps parfaits, extensions séparables, théorème de l'élément primitif.
Théorie de Galois : groupe de Galois d'une extension de corps, groupe de Galois de K(X)/K et théorème de Lüroth, extensions galoisiennes, corps finis, correspondance de Galois pour les corps finis, correspondance de Galois, lemme d'Artin, clôture galoisienne.
Applications de la théorie de Galois : constructibilité à la règle et au compas, polynômes cyclotomiques, extensions cycliques, extensions radicales, équations résolubles par radicaux.

Chapitre II : Modules

Modules libres.
Modules de torsion.
Modules de type fini sur les anneaux principaux : application aux groupes abéliens de type fini, application à la réduction des endomorphismes.

Chapitre III : Anneaux
Anneaux factoriels.
Anneaux noethériens.
Radical d'un idéal.
Décomposition primaire : idéaux primaires, idéaux irréductibles, décomposition primaire dans un anneau noethérien, idéaux premiers associés, idéaux premiers immergés.
Topologie de Zariski : spectre d'un anneau, espaces topologiques irréductibles, composantes irréductibles, espaces topologiques noethériens, dimension combinatoire d'un espace topologique, dimension de Krull d'un anneau.
Extensions finies et entières d'anneaux.
Lemme de normalisation de Noether.
Théorème des zéros de Hilbert.
Localisation.
Théorème de Cohen-Seidenberg.
Bases et degré de transcendance.

Groupe de lecture : "Un peu de géométrie non-euclidienne"

(Grégory Ginot)

Ce groupe de lecture se veut une introduction aux surfaces de Riemann et à la géométrie hyperbolique (en dimension 2 et 3) et sera complémentaire des cours de géométrie différentielle et de fonctions holomorphes. On y traitera cependant de nombreux exemples de manière élémentaire. Les surfaces de Riemann apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques; le point de vue que l'on adoptera est celui de surfaces munies d'une structure conforme ou complexe. La géométrie hyperbolique s'intéresse à des espaces à courbure négative.

On étudiera des modèles simples de géométrie hyperbolique en dimension 2 (qui sont donnés par des surfaces de Riemann) et 3, notamment le demi-plan de Poincaré et certains de ses quotients. En particulier on s'intéressera aux groupes fuchsiens et aux pavages hyperboliques. On étudiera également les surfaces associées aux équations algébriques en deux variables en s'attachant à leurs propriétés topologiques (par exemple leur genre) et géométrique.

Les participants devront donner, à tour de rôle, un exposé et les points évoqués ci-dessus ne sont qu'indicatifs. Si le temps le permet on pourra envisager d'aller plus loin, par exemple en s'intéressant au passage entre la description implicite d'une surface de Riemann et ses paramétrisations complexes (en particulier au théorème d'uniformisation de Riemann).

Bibliographie:
J. Anderson "Hyperbolic Geometry" Springer (2005)
J. Jost "Compact Riemann Surfaces" Springer
E. Reyssat "Quelques aspects des surfaces de Riemann", Birkhaüser (1989)
H.-P. de Saint-Gervais "Uniformisation des Surfaces de Riemann: retour vers un théorème centenaire" ENS Edition
W. Thurston "Three-dimensional Geometry and Topology", Princeton University Press

Groupe de lecture : Probabilités sur les graphes.

(Lorenzo Zambotti)

Nous allons nous intéresser à l'étude de plusieurs objets aléatoires sur des graphes: marches aléatoires, arbres recouvrants uniformes, marches auto-évitantes, percolation. La définition des ces objets est élémentaire mais les résultats que l'on peut en tirer sont profonds et riches de liens avec d'autres sujets.

Ouvrage conseillé: Probability on graphs, Geoffrey Grimmett, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-14735-4

Initiation à la modélisation et à la simulation numérique

(Benoist Desjardins, Thierry Goudon)

Ce cours a pour objet de présenter certaines équations différentielles issues de la physique et d'expliquer comment l'analyse mathématique guide la mise en oeuvre de méthodes numériques permettant la résolution de ces équations à l'aide de calculs par ordinateurs.
Prérequis : Bases de calcul différentiel, intégration, analyse fonctionnelle et curiosité scientifique.

Programme :

- Rappels sur les Equations Différentielles Ordinaires et leur approximation numérique (schémas d'Euler, Crank-Nicolson, schémas d'ordre plus élevé, notions de stabilité et consistance).

- Phénomènes de transport, méthodes de différences finies et volumes finis (notion de décentrement, viscosité numérique, analyse de stabilité L2 et L1).

- Phénomènes de diffusion, méthodes de différences finies (analyse de stabilité, schémas explicite et implicite, problèmes de convection-diffusion...).

- Un exemple issu de la mécanique des fluides : l'équation de Stokes (analyse fonctionnelle du problème : point de vue variationnel, point de vue par optimisation ; méthodes numériques : méthodes spectrales, schéma différences finies)

- Introduction au calcul haute performance : décomposition de domaines et éléments de parallélisation.

Le cours sera enrichi par des exposés et projets comprenant un travail de simulation numérique. L'évaluation sera basée sur une présentation orale.

Statistique

(Gérard Biau)

Objectifs : Ce cours vise à donner aux étudiants les bases fondamentales du raisonnement et de la modélisation statistique. L'accent est particulièrement mis dans cet enseignement sur l'utilisation pratique des nouveaux objets rencontrés.

Prérequis : Une bonne connaissance du calcul des probabilités et de l'algèbre linéaire.

Thèmes abordés :

Rappels de probabilités, estimation ponctuelle, estimation par intervalles, tests.

Estimateurs par maximum de vraisemblance.

Modèle linéaire : estimation, intervalles de confiance et tests.

Modèles exponentiels, exhaustivité.

Systèmes dynamiques

(François Béguin)

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps. On suppose généralement que la loi d'évolution est déterministe et fixée. La donnée est alors une transformation d'un espace dans lui même, que l'on peut itérer (système dynamique à temps discret), ou une équation différentielle, dont la solution est un flot (système dynamique à temps continu). De nombreux exemples intéressants viennent de la physique (mécanique, notamment mécanique céleste, mécanique statistique,...), mais aussi des autres domaines des mathématiques (arithmétique, géométrie,...), de l'informatique, la chimie, la biologie... L'évolution pour des temps longs est souvent compliquée, et sensible aux conditions initiales (deux états initiaux du système, même très proches, donneront lieu à des comportements radicalement différents à long terme). Divers outils permettent cependant de décrire cette évolution de façon qualitative, pour des classes de dynamiques assez vastes pour inclure des modèles intéressants. Je présenterai les principaux de ces outils :

- La théorie ergodique : théorème d'existence de mesures de probabilité invariantes, notion d'ergodicité, de mélange, théorèmes de convergence de la moyenne d'une fonction le long des orbites d'un système dynamique,...
- La théorie du nombre de rotation : résultats de conjugaison ou de semi-conjugaison topologique de certains difféomorphismes du cercle à des rotations, phénomènes de petits diviseurs, ensemble de rotation pour les difféomorphismes des surfaces...
- La théorie hyperbolique : linéarisation locale d'un système dynamique, existence de variétés invariantes, résultats de stabilité, existence de codage,...

Parallèlement, je proposerai d'étudier en détail des exemples de systèmes dynamiques qu'il est bon d'avoir toujours en tête, car on cherche souvent à s'y ramener : les automorphismes d'Anosov, les translations des tores, l'application de Gauss, les flots géodésique et horocyclique sur les surfaces à courbure négative, les décalages et sous-décalages.

Topologie algébrique

(Geoffrey Powell)

- Homotopie; le groupe fondamental; le théorème de van Kampen.
- Théorie des revêtements : classification et revêtement universel; revêtements galoisiens; relèvement.
- Homologie et cohomologie singulière; propriétés et applications; le cup produit.
- Dualité de Poincaré.

Si le temps le permet : aperçu des groupes d'homotopie supérieurs et le théorème d'Hurewicz.

Bibliographie (préliminaire) :

G. Bredon, Geometry and Topology, Springer, Corrected edition (June 24, 1993)
Y. Félix et D. Tanré, Topologie Algébrique - cours et exercices corrigés, Dunod, 2010
A. Hatcher, Algebraic topology Cambridge Univ. Press, 2002 (disponible en ligne)

Analyse des équations aux dérivées partielles

(Nicolas Burq)

(1) Solutions variationelles d'EDP elliptiques
- Espaces de Sobolev
- Le laplacien sur les tores
- Le laplacien avec conditions de Dirichlet sur un domaine

(2) Equations d'évolution
- Méthode de diagonalisation
- Solutions fondamentales

(3) L'équation de Schrödinger: quelques propriétés qualitatives

- Effet régularisant $H^{1/2}$
- Estimations de dispersion
- La méthode TT^* et les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev
- Estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger dans Rd.
- L'équation de Schrödinger non linéaire en dimension 1

(4) Equations de Schrödinger et séries aléatoires
- Un théorème de Paley-Zygmund sur les séries aléatoires sur le cercle
- Séries aléatoires sur R, l'oscillateur harmonique
- Séries aléatoires sur R v.s Strichartz
- L'équation de Schrödinger non linéaire en dimension 1 à données initiales aléatoires

Leçons de mathématiques

(Laure Saint-Raymond)

Au second semestre de la deuxième est proposé un ensemble de mini-cours sur des sujets peu enseignés à l'université, mais ouvrant sur des thématiques de recherche porteuses.

Il ne s'agit pas de cours spécialisés de type M2, mais de cours d'ouverture de niveau M1 destinés à donner aux étudiants une culture assez vaste qui puisse les aider à s'orienter de façon un peu originale.

- Imagerie mathématique — Habib Ammari
- Classification en apprentissage statistique — Sylvain Arlot
- Processus d'exclusion en mécanique statistique — Christophe Bahadoran
- Géométrie des convexes et applications — Franck Barthe
- Analyse semi-classique — Nicolas Burq
- Géométrie hyperbolique — Colin Guillarmou
- Analyse et arithmétique — Harald Helfgott
- Combinatoire en théorie des représentations — Bernard Leclerc
- Algèbres de Lie - chapitres choisis — Erhard Neher
- Systèmes dynamiques dans les espaces homogènes — Jean-François Quint
- Estimations non paramétriques — Vincent Rivoirard
- Formes normales de systèmes dynamiques et de structures géométriques — Laurent Stolovitch
- Transport optimal — Cédric Villani
- Processus de renouvellement et applications — Lorenzo Zambotti
- Théorie des modèles et corps valués — Martin Hils

ORGANISATION : Chaque leçon a une partie cours de 4h et une partie mini-groupe de travail constituée d'exposés d'élèves. Les élèves assistent à au moins 9 cours et 2 mini-groupes de travail dans lesquels ils donnent un exposé.

PREREQUIS :

- Algèbre 1
- Intégration et probabilités
- Topologie et calcul différentiel
- Analyse complexe et harmonique

Cours spécifique à la filière maths-physique : Systèmes de particules et équations aux dérivées partielles

(Vladimir Kazakov, Clément Mouhot)

Le but de ce cours à deux voix est double.

D'une part nous présenterons différents exemples de systémes de particules intéressants du point de vue physique, en nous attachant particulièrement à différents cas dont la dynamique est dite complètement intégrable".

Nous donnerons une introduction rapide à la mécanique classique analytique et aux méthodes quasi-classiques en mécanique quantique et nous étudierons les exemples des systèmes de particules classiques avec un champ d'interaction binaire régulier et du gaz quantique bosonique unidimensionnel en interaction "delta". Nous étudierons sur des cas simples la question mathématique de la stabilité de ces systèmes.

D'autre part nous discuterons des exemples d'équations aux dérivées partielles (EDP) utilisées pour décrire l'évolution de ces systèmes de particules. Cela sera l'occasion d'une introduction physique et mathématique plus précise aux EDP modélisant les phénomènes de transport. Puis nous donnerons une introduction physique à l'analyse des solutions exactes dans la hiérarchie des équations de Korteweg-de Vries (KdV). Enfin nous introduirons la notion de limite de champ moyen dans laquelle le nombre de particules tend vers l'infini pour obtenir une EDP sur une densité de probabilité, et nous la démontrerons mathématiquement dans le cas de particules interagissant par un potentiel suffisamment régulier.

Ce cours se situera donc au carrefour de la physique et des mathématiques, et au carrefour de l'analyse des équations aux dérivées partielles, des probabilités et des systèmes dynamiques.

Partie physique

Chapitre 1 : Exemples fondamentaux et mécanique classique analytique

- Équations de Hopf et de Burgers et méthode des caractéristiques
- Particules classiques et équations de Newton, Lagrange et Hamilton
- Crochets de Poisson, lois de conservation et le théorème de Liouville
- Transformations canonique et séparations des variables
- Variables action-angle et mouvement quasi-périodique

Chapitre 2 : Mécanique quantique et limite quasi-classique

- La fonction d'onde quasi-classique et les conditions aux limites
- La formule de Bohr-Sommerfeld
- Le passage à travers une barrière de potentiel

Chapitre 3 : Étude de quelques systèmes intégrables

- Introduction à la notion d'intégrabilité
- Exemples de systèmes intégrables, classiques et quantiques
- Système de particules quantiques en interactions delta : solution exacte par l'ansatz de Bethe
- Intégrabilité classique en EDP sur l'exemple de l'équation KdV

Partie mathématique

Chapitre 1 : Des équations différentielles ordinaires aux EDP

- Introduction au problème
- Le problème de Cauchy pour les EDO
- Échelles de descriptions
- Le problème de Cauchy pour les EDP
- Classes fondamentales d'EDP

Chapitre 2 : Quelques idées sur la stabilité des systèmes hamiltoniens

- Le problème de stabilité du système solaire
- Un cas modèle : les difféomorphismes du cercle
- Perturbation de systèmes complètement intégrables

Chapitre 3 : Introduction aux EDP de transports

- Introduction au problème
- L'équation de transport linéaire et la méthode des caractéristiques
- Équations de type Burgers non-linéaires
- L'équation de Vlasov linéaire et non-linéaire

Chapitre 4 : Modèles de champ moyen

- La notion de champ moyen
- Exemples en mécanique classique
- Exemples en mécanique quantique
- Exemples en mécanique des fluides

Chapitre 5 : Une preuve de la limite de champ moyen pour l'équation de Vlasov dans un cas simple

Références :

Landau L. and Lifshits E., Mécanique classique (vol. 1)
Landau L. and Lifshits E., Mécanique quantique (vol. 3)
Korepin V., Bogolyubov N., Izergin A., Quantum inverse scattering method and Correlation functions (Chap. 1)
Gaudin, M., La fonction d'onde de Bethe.

Miwa T., Differential equations, symmetries and differential algebras.
Witham G.B., Linear and non-linear waves.
Arnold V., Les méthodes mathématiques de la mécanique classique.
Spohn H., Large scale dynamics of interacting particles.
Evans L.C., Partial Differential Equations.
Brézis, H., Analyse fonctionnelle.

Cours spécifique à la filière maths-informatique : Apprentissage

(Sylvain Arlot, Francis Bach, Olivier Catoni, Guillaume Obozinski, Gilles Stoltz)

L'apprentissage est un domaine à la frontière entre mathématiques appliquées (statistique et optimisation) et informatique. On y considère un environnement incertain, produisant des variables observées (dites explicatives et qui sont souvent quantitatives) auxquelles sont associées des variables inconnues (qui peuvent être qualitatives ou quantitatives).

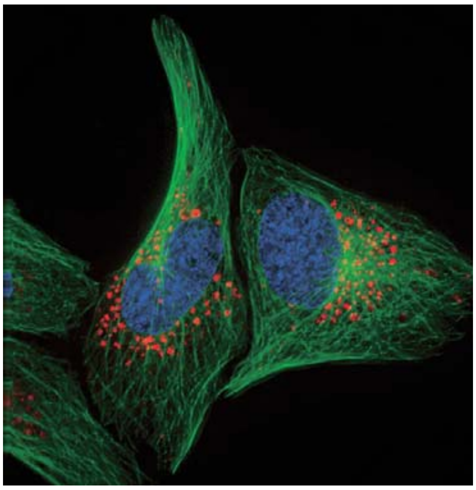
Ce type d'environnement est bien décrit par un modèle aléatoire, précisant la loi jointe des variables observées et inconnues. La théorie des probabilités et la statistique en déterminent le choix et les procédures d'estimation. Cependant, la théorie de l'apprentissage a un objectif plus simple et plus concret : il s'agit surtout de bien prédire les variables inconnues à partir des variables observées. (En clair, on s'intéresse surtout aux lois conditionnelles des variables inconnues étant données les variables observées.) Par ailleurs, on tâchera de faire les hypothèses les plus faibles possibles sur la loi jointe de l'environnement. On parle d'apprentissage statistique.

Le lien avec l'informatique se fait à travers la recherche de méthodes si possible efficaces à mettre en oeuvre (du point de vue de la complexité computationnelle et/ou mémoire). On vise également l'obtention de procédures les plus automatiques possibles, qui se calibrent elles-mêmes et sachent s'adapter à l'environnement, même si celui-ci change : c'est pourquoi on parle d'apprentissage automatique (« machine learning »), puisque l'on veut que l'homme, hormis la construction initiale de la méthode, intervienne le moins possible.

Il sera impossible, dans le cadre de ce cours, de dresser un panorama exhaustif de ce domaine déjà vaste et encore en expansion rapide. Les thèmes applicatifs suivants seront privilégiés :
- Classification (affectation d'une étiquette à des données)
- Débruitage d'un signal (à la fois pour des petits ou des grands nombres de variables explicatives)
- Apprentissage avec données séquentielles

On étudiera les concepts théoriques et algorithmiques qui les motivent et les justifient et on présentera des implémentations et illustrations de ces méthodes sur données réelles ou simulées.

Les seuls pré-requis sont d'être familier avec les fondements de la théorie des probabilités (notion de variables aléatoires, théorèmes de convergence, espérance conditionnelle), ceux vus au cours d'intégration et probabilités du premier semestre; il n'est pas nécessaire de suivre en parallèle le cours de processus aléatoires du second semestre. En revanche, quelques nouveaux outils probabilistes (et notamment, des inégalités de concentration) seront introduits.



Systèmes Biologiques : Bases et Formalisme

(Régis Ferrière & Denis Thieffry)

Ce cours généraliste, recommandé en première année, a pour objectif d'introduire les notions de base de la biologie, en relation avec les domaines de recherche émergents à l'interface des mathématiques et des sciences du vivant. De l'échelle microscopique des biomolécules à l'échelle globale de la biosphère, des réactions moléculaires en millisecondes aux temps géologiques de l'évolution, le cours présentera observations et données expérimentales essentielles en génétique moléculaire, biologie cellulaire, biologie des organismes, écologie et évolution. Cette introduction empirique conduira à la formulation des concepts biologiques et des modèles mathématiques pertinents qui permettent de représenter et de comprendre les mécanismes essentiels des phénomènes étudiés. L'objectif du cours n'est pas d'entrer dans le détail de l'analyse mathématique de ces modèles (ce que l'on fera au deuxième semestre dans le cadre du groupe de travail "Modélisation des systèmes biologiques"), mais plutôt de montrer comment la conceptualisation mathématique et les produits de la modélisation font progresser notre compréhension du vivant.

Thèmes abordés : Systèmes biochimiques et réactions enzymatiques. Principes de régulation génétique. Réseaux métaboliques. Voies de signalisation. Cycle cellulaire et mort cellulaire programmée. Communication intercellulaire. Morphogenèse et développement. Evo-Devo. Interactions entre espèces, coévolution. L'origine des espèces, l'horloge moléculaire et l'Arbre de la Vie.

Prérequis : Aucun.

Ouvrage de référence :

Sadava D, Heller D, Hillis C, Berenbaum M (2010) Life. The Science of Biology. WH Freeman. (En Anglais.)

Groupe de lecture « Modélisation des Systèmes Biologiques »

(Régis Ferrière, Denis Thieffry, Amandine Véber)

Reprenant les thèmes du cours de premier semestre "Systèmes Biologiques : Bases et Formalismes", l'objectif du groupe de lecture est d'approfondir l'étude des concepts et des théories mathématiques développés pour la modélisation et l'analyse des systèmes biologiques, du niveau des biomolécules au niveau des écosystèmes.

Le groupe de lecture est organisé autour de l'étude, de la présentation et de la discussion d'articles fondateurs et d'exposés par des chercheurs mathématiciens travaillant à l'interface mathématiques-biologie.

Prérequis : Cours de S1 "Systèmes biologiques : bases et formalismes".

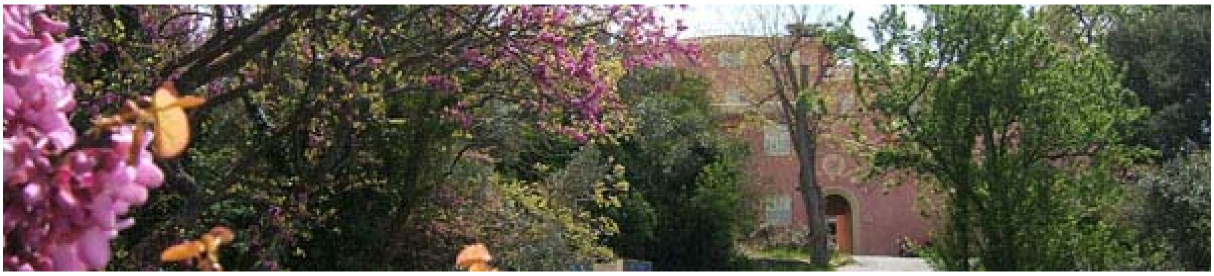
Ouvrage de référence :

Bolouri H (2008) Computational Modeling Of Gene Regulatory Networks: A Primer. Imperial College Press.

École d'été de Biologie de Marseille-Luminy

(Régis Ferrière & Etienne Pardoux)

Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), campus de Luminy, Marseille.



Organisée annuellement depuis 2002, l’École d’été de biologie de Marseille-Luminy (EEBML) propose une introduction à la biologie sous l'angle des méthodes empiriques : Comment étudie-t-on le vivant au niveau de la molécule, de la cellule, de l'organisme, de la population, de l’écosystème ? Comment acquiert-on et gère-t-on les données biologiques ? Quels sont les principes des techniques d’analyse et d’expérimentation ?

L’EEBML est organisée sous la forme d’une semaine de cours intensifs, combinant cours magistraux et séances de travaux pratiques. L’équipe pédagogique, plébiscitée par les participants, est composée de chercheurs et enseignants-chercheurs biologistes de réputation internationale. Chaque journée s’articule autour d’un niveau d’organisation des processus biologiques : génétique moléculaire, biologie cellulaire, développement, neurosciences, évolution, écologie. Depuis 2009, la journée “neurosciences” est organisée en partenariat avec l’Institut de Neurobiologie de la Méditerranée (www.inmed.univ-mrs.fr). Lors de l’édition 2010, le thème de l’évolution sera décliné par une série de conférences sur les questions des génomes, virus, système immunitaire et cerveau humain.

Également ouverte, dans la limite des places disponibles, aux doctorants et aux enseignants-chercheurs des laboratoires français de mathématiques et d’informatique, l’EEBML est l’occasion de rencontres et d’échanges scientifiques riches et fructueux.

Pas de prérequis particuliers.

Renseignements pratiques et inscriptions :

http://www.cmi.univ-mrs.fr/~pardoux/Ecole_Ete/Ecole_Ete.html

Mini Projet de Modélisation en laboratoire de Biologie

(Régis Ferrière, Denis Thieffry)

Ce mini projet vise à acquérir une expérience de la modélisation par une insertion dans une équipe de chercheurs biologistes. Le projet sera accueilli par un laboratoire de biologie à l'ENS ou au Collège de France. Chaque étudiant travaillera dans son équipe d’accueil durant le créneau hebdomadaire réservé à cette activité.

L’identification du laboratoire d’accueil, du responsable biologiste et d’un “conseiller” mathématique se fera en début d’année en concertation avec Régis Ferrière et Denis Thieffry.

A l’issue des quatre premières semaines, une présentation orale du sujet et de son approche permettra d'assurer le cadrage du projet.

L’ensemble du travail fera l’objet d’un rapport de fin de projet, évalué par l'encadrant biologiste, par le conseiller mathématique et par Régis Ferrière ou Denis Thieffry selon la specialité du sujet.

Prérequis : Cours “Systèmes biologiques : bases et formalismes”. Groupe de Lecture “Modélisation des systèmes biologiques”.

Stage long Mathématiques – Biologie

Stage de recherche, effectué dans un laboratoire de mathématiques ou de biologie. Il s’agit d’un stage de mathématiques portant sur un sujet d’interface motivé par ou appliqué à un problème biologique. Le stage fera l’objet d’un co-encadrement par deux responsables (mathématiques et biologie) donnera lieu en fin d’année à la rédaction d’un rapport et à une soutenance orale.

Prérequis : Cours “Systèmes biologiques : bases et formalismes” et Groupe de lecture “Modélisation des systèmes biologiques”.

Groupe de travail : Approximation diophantienne

(Serge Cantat, et Nicolas Ratazzi)

L'objet initial de l'approximation diophantienne est de comprendre avec quelle efficacité un nombre irrationnel x peut-être approché par des nombres rationnels p/q. Il s'agit par exemple d'estimer la distance de x à l'ensemble des rationnels p/q dont dénominateur et numérateur valent au plus *B*, lorsque *B* tend vers l'infini. Nous aborderons ce type de problème arithmétique, et certains liens qu'il noue avec la géométrie et les systèmes dynamiques.

Références

- J.W.S. Cassels : An Introduction to Diophantine Approximation, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 45.
- Caroline Series : The Geometry of Marko_ Numbers, Math. Intelligencer, Vol. 7, No. 3, p. 20-29.

Groupe de travail : Introduction à la K-théorie algébrique,

(Philippe Gille et Olivier Wittenberg)

La K-théorie algébrique associe à chaque anneau A des groupes abéliens K_0(A), K_1(A), K_2(A), ..., qui vérifient de nombreuses propriétés (suites exactes, produits, ...). On se propose de lire le traité de John Milnor sur ce thème consacré à la théorie en degré 0, 1, 2.
Le groupe K_0(A) est le groupe de Grothendieck associé aux A-modules projectifs de type fini (i.e. facteurs directs de modules libres de type fini). La première partie portera donc sur les modules projectifs, des exemples de tels modules non libres, et notamment sur la correspondance de Swan entre modules projectifs et fibrés vectoriels dans le cas de l'anneau des fonctions continues à valeurs réelles d'une variété X. On montrera que le groupe K_1(A) est l'abélianisé du groupe linéaire infini et que ce groupe ne consiste pas en général en A*. Le groupe K_2(A) est plus difficile à manier, il est construit à partir du groupe de Steinberg de A. Dans le cas d'un corps, sa détermination explicite est un théorème de Matsumoto, qui est l'objectif de ce groupe de lecture.

[M] J. Milnor, Algebraic K-theory, Annals of Mathematics Studies, No. 72 (1971), Princeton University Press.
[R] J. Rosenberg, Algebraic K-Theory and Its Applications Graduate Texts in Mathematics 147 (1994), Springer.
[W] C. Weibel, The K-book: An introduction to algebraic K-theory, livre en préparation sur la page de l'auteur.

Groupe de travail : Géométrie hyperbolique : rigidité et flexibilité

(Olivier Guichard)

L'espace hyperbolique fut au XIXe siècle l'un des premiers exemples découverts d'une géométrie non-euclidienne. On traitera dans un premier temps les différents modèles de l'espace hyperbolique et ses propriétés géométriques puis l'on expliquera la notion de variétés hyperboliques : ce sont des variétés qui sont « modelées » sur l'espace hyperbolique.
En dimension deux ces variétés sont très flexibles et leur ensemble peut être muni d'une topologie et constitue l'un des espaces de modules les plus étudiés : l'espace des modules des surfaces de Riemann et son avatar l'espace de Teichmüller. Ce dernier sera complètement décrit à l'aide de coordonnées géométriques. En dimension plus grande ou égale à trois, les variétés hyperboliques compactes sont rigides : nous verrons qu'elles sont déterminées par leur groupe fondamental. Cette rigidité est un cas particulier du résultat de rigidité de Mostow et une démonstration complète sera produite. Les autres aspects de la géométrie des variétés hyperboliques qui seront abordés sont
– la décomposition des variétés en parties « fine » et « épaisse »,
– la description des bouts,
– le volume,
– la construction des variétés hyperboliques en dimension trois par la théorie de Jorgensen et Thurston en utilisant les remplissages de Dehn.

Références

[Bon09] Francis Bonahon, Low-dimensional geometry.
[BP92] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio, Lectures on hyperbolic geometry.
[Rat06] John G. Ratcliffe, Foundations of hyperbolic manifolds.
[Thu97] William P. Thurston, Three-dimensional geometry and topology.

Groupe de travail : sur les équations différentielles p-adiques

(Yves André avec peut-être la collaboration de F. Baldassarri)

La théorie des équations différentielles dans le contexte non-archimédien s'est beaucoup développée dans les deux dernières décennies, et réécrit actuellement ses fondements dans une perspective plus géométrique. Elle a joué un rôle clé en théorie des représentations galoisiennes p-adiques, et aussi, tout récemment, dans la compréhension des propriétés asymptotiques des systèmes différentiels méromorphes de plusieurs variables complexes.

Le but de ce groupe de travail est d'initier les participants à cette théorie, en prenant comme fil conducteur le livre de *K. Kedlaya, p-adic Differential Equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 125, Cambridge Univ. Press, 2010 (une version on-line devrait être disponible sur sa page web à partir de janvier).

Groupe de travail : "Marches en milieu aléatoire"

(Pierre Bertin, Thierry Bodineau)

Une marche aléatoire unidimensionnelle se déplace avec probabilité p vers la gauche et 1-p vers la droite à chaque pas. L'objet de ce groupe de travail est de comprendre comment les propriétés de cette marche sont affectées quand elle évolue dans un milieu aléatoire où les probabilités de sauts varient à chaque site. En particulier, la progression de la marche aléatoire est ralentie par le désordre qui peut constituer des pièges. En modifiant l'interaction avec le milieu, les marches peuvent aussi modéliser des polymères dont les propriétés diffèrent grandement des marches aléatoires simples. Le groupe de travail sera l'occasion d'illustrer ces différents aspects.

Références

- E. Bolthausen, A. Sznitman : Ten lectures on random media. DMV Seminar, 32. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- S. Tavaré, O. Zeitouni : Lectures on probability theory and statistics. Lecture Notes in Mathematics, 1837. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
(http://www.math.umn.edu/~zeitouni/technion/ps/notes3typ.ps)

Groupe de travail de statistiques

(Gérard Biau, Olivier Catoni, Gilles Stoltz)

Objectif : Chaque séance sera consacrée à l'analyse et l'approfondissement d'un thème statistique. Il pourra s'agir, par exemple, d'un complément de cours (simulation de variables aléatoires, différents tests du chi deux, etc.) ou d'un sujet d'ouverture sur la recherche (estimation non paramétrique, théorie de l'apprentissage, etc.) Les thèmes des exposés ainsi que les références bibliographiques essentielles seront choisis ensemble en début d'année et la plus grande latitude quant à la forme sera laissée aux élèves. Les illustrations à l'aide d'un logiciel de statistique (R, Scilab, Matlab, etc.) seront encouragées et valorisées.

Groupe de travail Analyse : Compacité et convergence faible

(Anne-Laure Dalibard, David.Lannes)

De très nombreux problèmes d'analyse (mais aussi de géométrie différentielle et de probabilité) se ramènent à la résolution d'un système *non linéaire* d'équations aux dérivées partielles. Écrivons ce système sous la forme condensée

(1) $$A[u] = f$$

Où A [.] est un opérateur non linéaire et f une fonction.

On ne sait en général pas résoudre directement (1), mais on est par contre capable de construire une suite de solutions approchées (u_k) par la résolution de problèmes approchés

$$A_k[u_k] = f_k$$

Il existe de nombreuses techniques pour construire de tels problèmes approchés (régularisation, projection sur des espaces de dimension finie, etc.), mais la problématique essentielle demeure la même: la suite (u_k) converge-t-elle vers une solution u de (1) ?

Comme on doit travailler dans un espace de dimension infinie (typiquement, un espace fonctionnel de type L^p ou un espace de Sobolev), il est illusoire d'espérer avoir de la compacité forte sur la suite (u_k). En effet, en dimension infinie, la topologie forte et la topologie faible ne sont pas les mêmes et c'est la topologie faible qui est pertinente pour le problème qui nous intéresse.

Si l'on peut en général arriver sans trop de peine à montrer que la suite (u_k) converge *faiblement* (à extraction près) vers une limite u, une grosse difficulté se pose alors pour montrer que u est solution de (1). Cette difficulté est liée au caractère non linéaire du problème. En effet, si (u_k) et (v_k) convergent faiblement vers u et v, il est en général faux de conclure que le produit $u_k v_k$ converge faiblement vers uv.

Afin de pouvoir montrer que u est effectivement solution de (1), on est donc obligé de regarder plus en détail les obstructions qui empêchent la suite (u_k) de converger fortement. L'étude de ces obstructions a été à l'origine de nombreux outils qui jouent un rôle central en analyse : mesures de concentrations, mesures de défaut, concentration par compacité, concentration par compensation, etc.

L'objectif de ce groupe de travail est d'étudier ces notions essentielles et d'aborder certaines de leurs récents prolongements.

Références : L. C. Evans, Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations
L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations

Groupe de travail :
Propriétés fines des fonctions : initiation à la théorie géométrique de la mesure
(Patrick Bernard)

Après quelques préliminaires techniques sur la théorie de la mesure, notamment autour des théorèmes de recouvrement, nous aborderons :

- Mesures et dimension de Haussdorff.

- Formules de l'aire et de la coaire (qui sont des versions fines de la formule de changement de variable).

- Le lien entre les dérivées ponctuelles et distributionnelles pour les fonctions Sobolev ou Lipschitz.

Prérequis:
Théorie de la mesure et calcul différentiel.
Référence principale :
Evans & Gariepy : Mesure theory and fine properties of functions.

Cours d'anglais pour les scientifiques

Le département ECLA vous propose un cours d'Anglais pour scientifiques que nous vous recommandons.